УДК 303.732.4
EDN: XFFPON

Энтропийный показатель и его количественная оценка для различных методов свертки частных показателей в интегральный критерий качества

Касаткин Ф. Ю.

Медицинский информационно-аналитический центр,
Мелитополь, 272304, Российская Федерация

Постановка задачи. *В статье рассматривается актуальная задача количественной оценки потери информации, неизбежно возникающей при скаляризации векторной оценки качества альтернатив в интегральный критерий качества. Данная процедура широко применяется в теории принятия решений для получения линейного порядка на множестве альтернатив, однако она всегда сопряжена с редукцией исходного множества и, как следствие, с потерей части информации о различиях между ними. В известной литературе отсутствуют методы прямого количественного сравнения различных интегральных критериев качества по степени такой потери, что затрудняет обоснованный выбор способа агрегации для конкретных прикладных задач.* ***Целью исследования*** *является разработка и апробация научно обоснованного метода количественной оценки потери информации при скаляризации векторной оценки качества, который был бы универсальным и не зависел бы от конкретных характеристик сравниваемых методов. В качестве* ***методов исследования*** *используется научный аппарат теории информации. Построена вероятностная модель объекта исследования. Рассмотрены две гипотезы о законах распределения случайного вектора частных критериев качества и три метода формирования интегрального критерия качества: взвешенной суммы критериев, степенной мультипликативной свертки, некомпенсаторного порогового агрегирования.* ***Элементами новизны*** *представленного решения являются оценка количественных потерь информации при скаляризации вектора частных оценок качества в интегральный критерий качества путем расчета уменьшения условной информационной энтропии, а также вероятностные модели объекта исследования для априорно и апостериорно определенного распределения возможных значений частных оценок качества в составе векторной оценки.* ***Результаты.*** *Получены количественные оценки абсолютной, удельной и относительной потери информации для трех методов при различных гипотезах о распределении частных оценок качества. Установлено, что наименьшей потерей исходной информации характеризуется метод некомпенсаторного порогового агрегирования, а наибольшей – метод взвешенной суммы критериев. Относительная потеря информации между этими методами составляет около 20 %, что является значимой величиной. Показано, что метод является робастным. Дополнительно выявлена значительная (0,96) корреляция между степенью «компенсаторности» метода и величиной удельной потери информации.* ***Практическая значимость.*** *Разработанный метод универсален и может применяться для количественного сравнения любых интегральных критериев качества вне зависимости от физической природы сравниваемых альтернатив или их количественных характеристик. Полученные результаты позволяют лицам, принимающим решения, делать осознанный выбор в пользу того или иного метода*

Библиографическая ссылка на статью:
Касаткин Ф. Ю. Энтропийный показатель и его количественная оценка для различных методов свертки частных показателей в интегральный критерий качества // Вестник СПбГУТ. 2025. Т. 3. № 4. С. 5. EDN: XFFPON

Reference for citation:
Kasatkin F. Entropy Indicator and Its Quantitative Assessment for Various Methods of Convolution of Partial Indicators into an Integral Quality Criterion // Herald of SPbSUT. 2025. Vol. 3. Iss. 4. P. 5. EDN: XFFPON

© Касаткин Ф. Ю., 2025

агрегации, основываясь не только на его качественных особенностях, но и на объективной количественной оценке сохранности исходной информации. В частности, подтверждено, что применение метода некомпенсаторного порогового агрегирования позволяет существенно снизить информационные потери при скаляризации по сравнению с широко используемым методом взвешенной суммы критериев, что особенно важно в задачах, где высокая степень различения альтернатив имеет критическое значение.

Ключевые слова: *сравнение альтернатив, векторная оценка качества, ранговая оценка качества, частные критерии качества, скаляризация, интегральный критерий качества, информационная энтропия, количество информации, удельная потеря информации, относительная потеря информации*

Введение

Стандартной задачей теории принятия решений является выявление предпочтения между различными объектами сравнения (вещи, явления, процессы, качества и пр.). При этом предполагается, что сравниваемые объекты – это конечный набор (подмножество) различных конкретных вариантов (реализаций, экземпляров и пр.) из множества всех возможных вариантов (которое в общем случае бесконечно). Также предполагается, что лицо, принимающее решения (ЛПР), обладает системой ценностей (см. [1]), т. е. в состоянии определить свои ограничения на набор возможных вариантов, которые оно рассматривает, и свои предпочтения между сравниваемыми вариантами. Явно сформулированные предпочтения ЛПР позволяют ему оценить любой из предложенных к сравнению / выбору вариантов на основе отношения предпочтения между любой парой вариантов, определяющего для него либо превосходство (бо́льшую ценность) одного из сравниваемых вариантов над другим, либо их эквивалентность (равноценность). В соответствии с терминологией работы [1] будем называть различные варианты альтернативами, а подмножество всех возможных вариантов объектов, включающее в себя все рассматриваемые альтернативы, – множеством альтернатив.

В случае если прямое сравнение объектов как таковых на основании впечатления ЛПР о каждом из них невозможно или нецелесообразно (например, объекты недоступны для непосредственного восприятия, не имеют физической природы и пр.), определяются:

– конечный набор признаков, присущих всем альтернативам;

– шкала измерения каждого из признаков (полярная: «Да – Нет»; порядковая: школьные оценки «2 – 3 – 4 – 5»; численная и др.);

– пределы изменения каждого из признаков на шкале измерений для множества всех возможных вариантов (т. е. диапазон возможных значений каждого признака).

Этот набор признаков с определенными на их шкалах значениями формирует вектор признаков, являющийся векторной оценкой качества (в значении, раскрытом в [2]) альтернативы, к которой он относится.

Как указано в [1], «составное понятие, связывающее между собой признак, цель (т. е. значение или диапазон значений признака, желаемое ЛПР) и отношение между целью и признаком (т. е. связь предпочтения ЛПР и меры отклонения признака от цели по его шкале), называется критерием. При этом формальное описание цели и отношения при описании критерия чаще всего опускается (так как либо полагается очевидным, либо описывается опосредованно), и критерий отождествляется с признаком, который входит в его состав». Например, критерий, включающий в себя цену автомобиля, не требует явного описания цели и предпочтения – очевидно, что цену предпочтительно минимизировать. При этом зависимость между ценой и техническими характеристиками автомобиля опосредована, так как она формируется уже в контексте выбора, который у каждого ЛПР в конкретной ситуации индивидуален.

В теории принятия решений (см., например [1, 3, 4]) задача построения указанного отношения предпочтения имеет два класса решений. Первый включает методы критериального выбора, которые выстраивают отношение предпочтения между альтернативами на основе непосредствен-

EDN: XFFPON
URL: https://vestnik-sut.ru/2025-4/C05.pdf

ного сравнения между собой векторов их критериев: отношение Парето-доминирования, метод лексикографической оптимизации [1, 3, 4] и пр. При всем многообразии и глубокой проработке указанных методов в теории выбора им присущ ряд принципиально неустранимых недостатков, снижающих их практическую ценность. В частности, они не позволяют различать альтернативы, среди которых отсутствуют Парето-доминирующие, без введения дополнительной информации о сравнительной значимости каждого из критериев для ЛПР – например, количественной важности критериев [5]. Поэтому значительное практическое распространение получил второй класс решений – скаляризация векторов признаков альтернатив в интегральный критерий качества (ИКК) – число, однозначно отражающее ординальные (т. е. порядковые) предпочтения ЛПР в отношении данного варианта. Большее численное значение ИКК одной альтернативы по сравнению с другой, означает ее предпочтительность; равенство – эквивалентность альтернатив по предпочтению. Определив численные значения ИКК для всех альтернатив из рассматриваемого подмножества, ЛПР определяет нестрогий порядок предпочтений [6] на данном подмножестве путем агрегации всех критериев из состава их вектора в число по определенным правилам. Как указано в [1], поскольку любые два числа (скаляры) сопоставимы на числовой оси, использование данной агрегации гарантирует получение линейного порядка на множестве альтернатив. Таким образом, на множестве значений ИКК определяется отношение предпочтения, позволяющее ранжировать по предпочтению все возможные альтернативы без обязательного введения дополнительных условий о том, насколько каждый из критериев в составе агрегируемого вектора значим для ЛПР относительно прочих.

Вместе с тем описанная выше агрегация независимо от способа осуществления в общем случае снижает мощность множества возможных значений ИКК по сравнению с мощностью исходного множества альтернатив: если часть альтернатив была неразрешима по предпочтению методами критериального выбора, то разрешить их без введения дополнительных условий по сравнительной значимости критериев можно, только лишь объединяя неразрешимые по предпочтению альтернативы в непересекающиеся подмножества (классы эквивалентности) на множестве альтернатив [1, 6]: каждому классу эквивалентности соответствует уникальное значение ИКК. Например, в очень распространенном на практике случае векторов ранговых критериев (набор оценок ученика или студента по различным предметам, определенных по балльной шкале) агрегация вектора критериев в ИКК приводит к неразличимости отдельных критериев. Данный вопрос применительно к ИКК анализа информации в центрах обработки вызовов подробно раскрыт автором в [7].

Соответственно, для построения ИКК следует выбирать способ агрегации критериев из состава вектора, в наибольшей степени отражающий ординальные предпочтения ЛПР в отношении сравниваемых альтернатив. Например, широко распространенный метод агрегации в виде суммы критериев с заданными удельными весами, называемый в [1] аддитивной обобщающей функцией, в [4] – аддитивной функцией ценности, а в [8] – методом взвешенной суммы критериев (ВСК), имеет два условия применимости: линейный рост предпочтений по шкале каждого критерия, а также независимость критериев по предпочтению. Данные условия на практике справедливы лишь в отдельных случаях. Однако, ввиду крайней простоты и интуитивной понятности метода ВСК лицам без знаний в области теории принятия решений, он очень часто применяется для построения ИКК «по умолчанию» – либо вообще без анализа указанных выше ограничений, либо с сознательным их игнорированием ради простоты расчета ИКК [8].

Другим распространенным видом обобщающей функций является ИКК, построенный методом степенной мультипликативной свертки (СМС) [1]. Для метода СМС характерны гиперболические кривые безразличия, которые в некоторых случаях на практике позволяют определять структуру ординальных предпочтений ЛПР точнее, чем прямые безразличия в методе ВСК. Вместе с тем, так как метод СМС может быть сведен к специальному виду ВСК путем логарифмирования, то, согласно [4], указанные выше два условия применимости для метода СМС также обязательны.

Альтернативой рассмотренным подходам, в которой отсутствуют оба указанных выше ограничения по применимости, является метод некомпенсаторного порогового агрегирования (НПА), в функционально законченном виде сформированный в работах [9–12]. Главная его особенность – невозможность компенсации даже одной «плохой» оценки в составе ИКК «отличными» значениями всех остальных оценок, что адекватно отражает реальную структуру предпочтений ЛПР для обширного класса практических случаев. Применение метода НПА в сравнении с ВСК для формирования ординальной оценки качества обработки информации подробно рассматривается в [7].

Анализируя различные способы агрегации критериев из состава векторной оценки качества – частных критериев (ЧК) – в ИКК, помимо адекватности (в значении, указанном в [2]) выбранного способа истинной структуре предпочтений ЛПР, также следует учитывать степень редукции изначального множества альтернатив в множество значений ИКК. Чем больше степень указанной редукции, тем больше исходной информации о различиях сравниваемых альтернатив теряется при агрегации; степень различения альтернатив уменьшается (происходит редукция различимости). Причем в общем случае даже описанная выше неразличимость ЧК как одинаковое для разных видов ИКК условие их формирования может в итоге приводить к различной редукции различимости для каждого вида ИКК. Следовательно, как для абсолютной редукции (различимость для выбранного вида), так и для относительной (разница в редукции информации для разных видов) необходим метод оценки потери информации при скаляризации вектора ЧК в ИКК. В настоящей работе впервые предлагается применение для данной цели методики энтропийного анализа, основанной на научном аппарате теории информации.

Моделирование объекта исследования

Объектом настоящего исследования является ИКК, получаемый путем трехступенчатой обработки результатов наблюдения той или иной вещи, явления, процесса, качества и пр., т. е. объекта наблюдения, чьи свойства могут быть как объективными, так и субъективными – отражающими восприятие объекта субъектом. Также они могут быть измеримыми (доступными для непосредственного измерения / оценки) или неизмеримыми (недоступными / с трудом доступными для непосредственного измерения / оценки). Например, в [7] рассматривается качество услуг контакт-центра, определяемое как оценка удовлетворенности абонентов. Однако данная удовлетворенность труднодоступна для непосредственного измерения и оценивается по косвенным признакам. Она является субъективной оценкой (поскольку ее оценивают субъекты общения), не доступной для непосредственного измерения. Другой пример – выбор нового автомобиля путем осмотра и тест-драйва, который формирует у потенциального покупателя субъективное, но (при введении неких общих условий) доступное для непосредственной оценки впечатление. При этом заочный выбор автомобиля без осмотра и тест-драйва производится на основании совокупности технических характеристик, цены и имиджа – т. е., доступных для непосредственной оценки и объективных (кроме имиджа) свойств объекта. Вообще ЛПР при оценке объекта использует вектор y объективных измеримых характеристик (свойств) объекта, который, по его мнению, имеет максимально сильную корреляцию с вектором x собственных свойств объекта.

Таким образом, первой ступенью указанной выше обработки является формирование вектора объективных оценок y_i для каждой из подлежащих сравнению альтернатив x (т. е. конкретных реализаций объекта из множества всех возможных вариантов). Здесь предполагается, что в соответствии с указанным в [1] условием объективные оценки y_i слабо коррелированы. В дальнейшем изложении предполагается весьма слабое ограничение: значения y_i предполагаются независимыми. Второй ступенью оценивания является ранжирование вектора $\boldsymbol{y}$, т. е. переход от вектора объективных оценок $\boldsymbol{y}$ к вектору ранговых оценок – ЧК $\boldsymbol{z}$. Данная процедура не является обязательной в общем случае – например, ИКК методов ВСК и СМС могут скаляризовать непосредственно вектор $\boldsymbol{y}$. Однако, ввиду исключительно широко распространенного на практике ранжирования $\boldsymbol{y} \to \boldsymbol{z}$ или даже непосредственного перехода $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{z}$ (например, школьная оценка за прочитанное наизусть стихотворение), далее рассматривается именно формирование ИКК из вектора ЧК $\boldsymbol{z}$. В соответствии с вышеуказанным, ранги компонента z далее полагаются независимыми. Третьей ступенью оценивания является скаляризация ЧК в ИКК $\boldsymbol{z} \to q$.

EDN: XFFPON
URL: https://vestnik-sut.ru/2025-4/C05.pdf

Далее значения q для альтернатив используются с целью сравнения альтернатив по предпочтению:

$$\begin{cases} q_1 > q_2 \leftrightarrow \boldsymbol{x}_1 \succ \boldsymbol{x}_2 \\ q_1 = q_2 \leftrightarrow \boldsymbol{x}_1 \sim \boldsymbol{x}_2 \end{cases}.$$

Моделью объекта исследования является совокупность из:

– характеристик вектора ЧК $\boldsymbol{z}$;

– выбранного для создания ИКК метода и конкретной методики его формирования;

– выбранных функций распределения случайного вектора ЧК $\boldsymbol{z}$ и случайной величины ИКК q.

Предлагаемая автором методика энтропийного анализа потери информации при скаляризации $\boldsymbol{z} \to q$ не зависит как от количества n компонент $\boldsymbol{z}$, так и от максимального ранга m каждой компоненты. Единственное ограничение: интервал рангов [1; m] одинаков для каждой компоненты. Далее без ограничения общности рассматривается пример, аналогичный рассмотренному автором в [2]: вектор ЧК, состоящий из трех компонент, каждая из которых принимает значения от 1 до 4. Значения ИКК предполагаются нормированными к диапазону $[0;\ 1]$.

Для каждого конкретного значения ИКК введем понятие его ранга: это номер r данного значения q_r в упорядоченном по возрастанию (от 0 до 1) ряду возможных значений ИКК:

$$r \in [1; |Q|];$$
$$r_{\min} = 1 \leftrightarrow q_{\min} = 0;$$
$$r_{\max} = |Q| \leftrightarrow q_{\max} = 1.$$

Так как все три рассматриваемых ИКК приводят к неразличимости ЧК, введем показатель k_r – кратность оценки q_r; $k_r = |\boldsymbol{Z}_r|$ различных векторов ЧК $\boldsymbol{z}_{rt} \in \boldsymbol{Z}_r$для которых значение ИКК равно q_r:

$$\forall t \in [1;\ k_r] : q(\boldsymbol{z}_{rt}) = q_r. \quad (1)$$

Например, векторы ЧК $\boldsymbol{z}_1 = (1, 1, 2)$; $\boldsymbol{z}_2 = (1, 2, 1)$; $\boldsymbol{z}_3 = (2, 1, 1)$ отличаются только порядком компонент. Следовательно, они неразличимы, так как дадут одинаковое уникальное значение q_2 для всех трех ИКК (в этом можно будет убедиться ниже, после описания всех трех методов формирования ИКК), т. е. $k_2 = 3$.

В реальных задачах выбора чаще всего достоверно неизвестно, какое количество и частота появления альтернатив ожидаются априорно. Следовательно, подлежащие сравнению величины, оцениваемые через их векторы ЧК, являются случайными событиями. Каждый конкретный вектор ЧК $\boldsymbol{z}_i$; $i \in [1; |Z|]$ и однозначно соответствующее ему значение ИКК q_r; $r \in [1; |Q|]$ будут реализациями случайных величин $\boldsymbol{z}$ из генеральной совокупности $\boldsymbol{Z}$ и q из генеральной совокупности Q соответственно. Для адекватности (в значении [2]) описываемой модели реальным альтернативам и процессу выбора далее рассматриваются две гипотезы относительно законов распределения случайного вектора ЧК $\boldsymbol{z}$ и случайной величины ИКК q.

Гипотеза 1. Априорно неизвестный закон распределения $\boldsymbol{z}$.

Для исключения априорной неопределенности принимается гипотеза о равномерном распределении $\boldsymbol{z}$ – для любого $i \in [1; |\boldsymbol{Z}|]$:

$$P(\boldsymbol{z} = \boldsymbol{z}_i) = p = \frac{1}{|\boldsymbol{Z}|} = m^{-n},$$

где $n = 3$; $m = 4$; $p = 1/64 = 0{,}015625 \approx 0{,}016$.

Закон распределения q определяется через кратность соответствующих значений ИКК:

$$\forall r \in [1; |Q|] : P(q = q_r) = pk_r. \quad (2)$$

Определим в пределах данного раздела законы распределения $\boldsymbol{z}$ и q, соответствующие первой гипотезе, как $P_1(\boldsymbol{z})$ и $P_1(q)$.

Гипотеза 2. Априорно известный закон распределения q.

Допустим, что q распределено симметрично, и его медиана $Me(q)$ равна математическому ожиданию: $M(q) = Me(q) \approx 0{,}5$ (т. е. наиболее вероятны альтернативы со «средним» значением ИКК). Данная ситуация часто встречается на практике и отражает, например, преобладание на потребительском рынке товаров со «средними» наборами потребительских характеристик по отношению к экстремальным – «бюджетным» и «премиальным». С точки зрения ЛПР это означает описанное в [1] стремление ЛПР к достижению реальной цели – получению альтернативы с $q \approx 0{,}5$ (например, для ЛПР такое значение ИКК означает максимальную ценность альтернативы [13].

Определим в рамках данного раздела законы распределения $\boldsymbol{z}$ и q, соответствующие гипотезе 2, как $P_2(\boldsymbol{z})$ и $P_2(q)$. Не ограничивая общности, примем для определенности, что для нечетного $|Q|$ мода $Mo(q)$ равна математическому ожиданию и медиане $Me(q)$:

$$M(q) = Mo(q) = Me(q) = q_r,$$

где $r = (|Q| + 1)/2$, т. е. q_r – это значение ИКК, которое находится в середине ряда всех возможных значений; $q_r \approx 0{,}5$.

Для четного $|Q|$ мода имеет два отличающихся равновероятных значения: $Mo_1(q) \lessapprox 0{,}5$ и $Mo_2(q) \gtrapprox 0{,}5$. Формально: $Mo_1(Q) = q_r$, где $r = |Q|/2$; $Mo_2(Q) = q_s$, где $s = (|Q| + 1)/2$.

Также примем для определенности спад $P_2(q)$ от $P_2(Mo(q))$ до:

$$P_2(q = 0) = P_2(q = 1) = 0{,}2P_2(Mo(q))$$

с постоянным декрементом и выполнение стандартного условия нормировки вероятностей:

$$P_2(q = 0) + \dots + P_2(q = 1) = 1.$$

Графики закона распределения ИКК при гипотезе 2 для нечетной и четной мощности множества значений ИКК, приведены на рисунке 1.

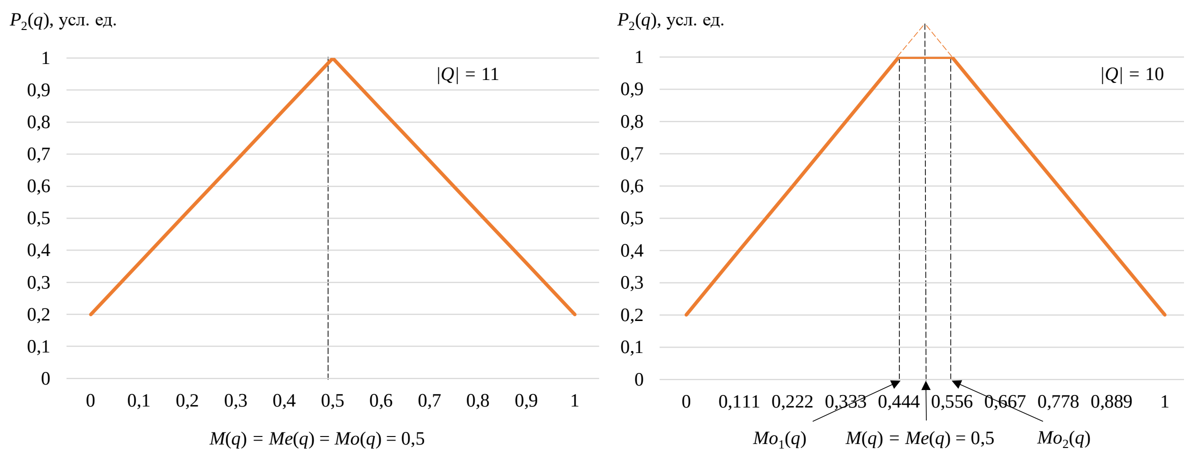

Рис. 1. Графики закона распределения ИКК при гипотезе 2 для нечетной и четной мощности множества значений ИКК

Как видно из рисунка 1, для нечетного $|Q|$ закон распределения q треугольный с абсциссой вершины 0,5; для четного $|Q|$ – трапецеидальный с абсциссами вершин $Mo_1(q)$ и $Mo_2(q)$. Следует отметить, что для любого значения $|Q|$ в случае линейного прироста q по мере увеличения $r(q)$ график $P_2(q)$ будет симметричным:

$$M(q) = Me(q) = 0{,}5,$$

а при нечетном $|Q|$ восходящая и нисходящая ветви графика будут прямыми линиями:

$$0{,}5 - Mo_1(q) = Mo_2(q) - 0{,}5.$$

В противном случае график $P_2(q)$ будет несимметричным, восходящая и нисходящая ветви графика могут быть ломаными линиями:

$$0{,}5 - Mo_1(q) \neq Mo_2(q) - 0{,}5.$$

В рамках рассматриваемой гипотезы 2 априорно заданный закон распределения q означает апостериорно (по отношению к q) заданный закон распределения $\boldsymbol{z}$, определяемый выбранной методикой формирования ИКК.

Зная $P(q)$, определим $P(\boldsymbol{z})$ по формуле полной вероятности:

$$P(\boldsymbol{z}, q) = P(\boldsymbol{z}|q)P(q) = P(q|\boldsymbol{z})P(\boldsymbol{z}),$$

$$P(\boldsymbol{z}) = \frac{P(\boldsymbol{z}|q)P(q)}{P(q|\boldsymbol{z})}.$$

Так как каждое конкретное значение q_r, где $r \in [1; |Q|]$, порождается некоторыми конкретными значениями $\boldsymbol{z}_{rt}$ (1), принадлежащими множеству $\boldsymbol{Z}_r$,то для всех значений $\boldsymbol{z} \notin \boldsymbol{Z}_r$, $P(q = q_r) \equiv 0$, а для всех $\boldsymbol{z} \in \boldsymbol{Z}_r, P(q = q_r) \equiv 1$. Поскольку априорный закон распределения $P(\boldsymbol{z} = \boldsymbol{z}_{rt}|q_r)$ не известен, примем, что все $\boldsymbol{z}_{rt}$, порождающие заданное q_r, равновероятны.

В данном случае:

$$P(\boldsymbol{z} = \boldsymbol{z}_{rt}|q_r) = \frac{1}{|\boldsymbol{Z}_r|} = \frac{1}{k_r} \to \forall t \in [1; k_r] : \ P(\boldsymbol{z} = \boldsymbol{z}_{rt}) = \frac{P(q = q_r)}{k_r}. \qquad (3)$$

Рассматриваемые ИКК

Краткие характеристики рассматриваемых ИКК были даны во введении. Обоснование выбора методов их формирования будет приводиться в соответствующих описаниях. Далее для всех переменных, функций, параметров, относящихся к конкретному ИКК, будет применяться первый нижний индекс: 1 – для метода ВСК; 2 – для СМС; 3 – для НПА. Законы распределения q и $\boldsymbol{z}$ будем далее записывать как $P_{ij}(q)$ и $P_{ij}(\boldsymbol{z})$, где $i \in [1; 3]$ – номер рассматриваемого ИКК, а $j \in [1; 2]$ – номер гипотезы о законе распределения.

ИКК метода ВСК является наиболее распространенным на практике и для многих ЛПР – единственным известным (и интуитивно понятным) методом агрегирования ЧК. Его достоинства, недостатки и особенности подробно разобраны в работе [8]. В настоящем случае предполагается равный вес ЧК в составе ИКК. Обозначим ИКК метода ВСК как $q_1(\boldsymbol{z})$.

Для нормировки к диапазону значений [0; 1] при выбранных значениях $n = 3$ и $m = 4$ q_1 далее рассчитывается по формуле:

$$q_1(\boldsymbol{z}) = \frac{(z_1 + z_2 + z_3 - 3)}{9}. \qquad (4)$$

Значения q_{1r}, кратности k_{1r} векторов $\mathbf{z}_{rt}$, порождающих соответствующие значения q_{1ri}, рассчитанные по формуле (4), и значения $P_{11}(q)$, $P_{12}(q)$ для всех рангов $r \in [1; |Q_1|]$, рассчитанные по формуле (2), приведены в таблице 1. Из нее следует, что максимальный ранг $r_{1\max} = |Q_1| = 10$. Рассчитанные по формуле (3) значения $P_{12}(\mathbf{z})$ приведены в таблице 2. На рисунке 2 изображены графики законов распределения ИКК метода ВСК для гипотез 1 и 2. Видно, что за счет свойств метода ВСК график $P_{11}(q)$ имеет симметричную колоколообразную форму: чем ближе значение q_1 к 0,5, тем выше кратность k_1 производящих данное значение q_1 векторов $\mathbf{z}$.

Таблица 1. Метод ВСК: Рассчитанные значения параметров ИКК и законы распределения ИКК для гипотез 1 и 2

r	q_{1r}	k_{1r}	$P_{11}(q)$	$P_{12}(q)$
1	0	1	0,0156	0,0333
2	0,111	3	0,0469	0,0667
3	0,222	6	0,0938	0,1000
4	0,333	10	0,1563	0,1333
5	0,444	12	0,1875	0,1667
6	0,556	12	0,1875	0,1667
7	0,667	10	0,1563	0,1333
8	0,778	6	0,0938	0,1000
9	0,889	3	0,0469	0,0667
10	1	1	0,0156	0,0333

Таблица 2. Апостериорный закон распределения вектора частных оценок для метода ВСК и гипотезы 2

$\mathbf{z}$	(1,1,1)	(1,1,2)	(1,2,1)	(2,1,1)	(1,1,3)	(1,3,1)	(3,1,1)	(1,1,4)	(1,4,1)	(4,1,1)
$P_{12}(\mathbf{z})$	0,0333	0,0222	0,0222	0,0222	0,0167	0,0167	0,0167	0,0133	0,0133	0,0133
$\mathbf{z}$	(1,2,2)	(2,1,2)	(2,2,1)	(1,2,3)	(1,3,2)	(2,1,3)	(2,3,1)	(3,1,2)	(3,2,1)	(1,2,4)
$P_{12}(\mathbf{z})$	0,0167	0,0167	0,0167	0,0133	0,0133	0,0133	0,0133	0,0133	0,0133	0,0139
$\mathbf{z}$	(1,4,2)	(2,1,4)	(2,4,1)	(4,1,2)	(4,2,1)	(1,3,3)	(3,1,3)	(3,3,1)	(1,3,4)	(1,4,3)
$P_{12}(\mathbf{z})$	0,0139	0,0139	0,0139	0,0139	0,0139	0,0139	0,0139	0,0139	0,0139	0,0139
$\mathbf{z}$	(3,1,4)	(3,4,1)	(4,1,3)	(4,3,1)	(1,4,4)	(4,1,4)	(4,4,1)	(2,2,2)	(2,2,3)	(2,3,2)
$P_{12}(\mathbf{z})$	0,0139	0,0139	0,0139	0,0139	0,0133	0,0133	0,0133	0,0133	0,0139	0,0139
$\mathbf{z}$	(3,2,2)	(2,2,4)	(2,4,2)	(4,2,2)	(2,3,3)	(3,2,3)	(3,3,2)	(2,3,4)	(2,4,3)	(3,2,4)
$P_{12}(\mathbf{z})$	0,0139	0,0139	0,0139	0,0139	0,0139	0,0139	0,0139	0,0133	0,0133	0,0133
$\mathbf{z}$	(3,4,2)	(4,2,3)	(4,3,2)	(2,4,4)	(4,2,4)	(4,4,2)	(3,3,3)	(3,3,4)	(3,4,3)	(4,3,3)
$P_{12}(\mathbf{z})$	0,0133	0,0133	0,0133	0,0167	0,0167	0,0167	0,0133	0,0167	0,0167	0,0167
$\mathbf{z}$	(3,4,4)	(4,3,4)	(4,4,3)	(4,4,4)	—	—	—	—	—	—
$P_{12}(\mathbf{z})$	0,0222	0,0222	0,0222	0,0333	—	—	—	—	—	—

ИКК метода СМС подробно описан в работе [1]. На практике он применяется значительно реже, чем ИКК метода ВСК, так как для большинства ЛПР менее интуитивно понятен. Он «отдает предпочтение» значениям ЧК в середине диапазона возможных значений [1], поэтому включение ИКК метода СМС в анализ обосновано в том числе тем, что определение достаточной цели ЛПР $q \approx 0{,}5$ (см. выше) вполне отвечает распределению потребительских свойств рыночных товаров и услуг на практике. В частном случае закупки потребителем у поставщика услуги, стоимость которой линейно зависит от значения ИКК, применение заказчиком ИКК метода СМС будет стимулировать поставщика (при некоторых общих условиях) поставлять услугу с $q \approx 0{,}5$ [13]. Практический пример применения ИКК МСМ приведен в работе [14], где один из рассматриваемых критериев – «надежность работы и информационная безопасность» – формируется методом СМС (в отличие от прочих критериев, формируемых методом ВСК) с обоснованием: «… Применение мультипликативной модели обосновывается тем, что низкие оценки даже по одному-двум показателям нежелательны. Если хоть один показатель нулевой, единая оценка тоже нулевая. Аддитивная свертка здесь не подходит, так как приведенные показатели не компенсируют друг друга».

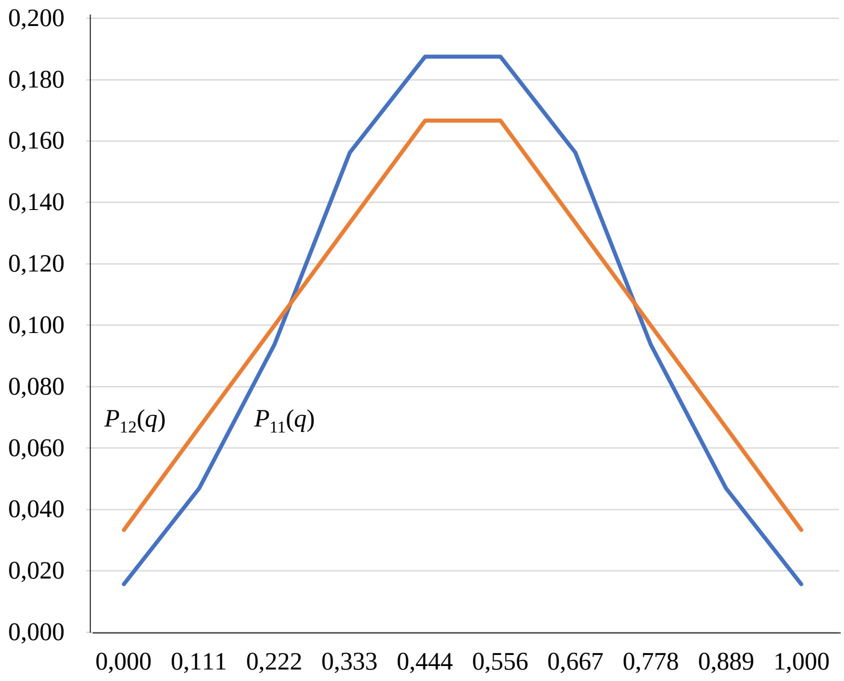

Рис. 2. Графики законов распределения ИКК метода ВСК для гипотез 1 и 2

Обозначим ИКК метода СМС как $q_2(\boldsymbol{z})$. Для нормировки к диапазону значений [0; 1] при выбранных значениях n и m, q_2 далее определяется по формуле:

$$q_2(z) = \frac{(\sqrt[3]{z_1 z_2 z_3} - 1)}{3}. \tag{5}$$

Рассчитанные по формуле (5) значения q_{2r}, а также кратности k_{2r} векторов $\boldsymbol{z}_t$, соответствующих значениям q_{2r}, и рассчитанные по формуле (2) значения $P_{21}(q)$ и $P_{22}(q)$ для всех рангов $r \in [1; |Q_2|]$ приведены в таблице 3. Из нее следует, что максимальный ранг $r_{2\max} = |Q_2| = 16$. Рассчитанные по формуле (3) значения $P_{22}(\boldsymbol{z})$ содержатся в таблице 4.

Таблица 3. Метод СМС: Рассчитанные значения параметров ИКК и законы распределения ИКК для гипотез 1 и 2

r	q_{2r}	k_{2r}	$P_{21}(q)$	$P_{22}(q)$
1	0,000	1	0,016	0,021
2	0,087	3	0,047	0,033
3	0,147	3	0,047	0,045
4	0,196	6	0,094	0,057
5	0,272	6	0,094	0,068
6	0,333	7	0,109	0,080
7	0,360	3	0,047	0,092
8	0,430	9	0,141	0,104
9	0,507	6	0,094	0,104
10	0,540	3	0,047	0,092
11	0,628	6	0,094	0,080
12	0,667	1	0,016	0,068
13	0,725	3	0,047	0,057
14	0,767	3	0,047	0,045
15	0,878	3	0,047	0,016
16	1,000	1	0,033	0,021

Таблица 4. Апостериорный закон распределения вектора частных оценок для метода СМС и гипотезы 2

$\boldsymbol{z}$	(1,1,1)	(1,1,2)	(1,2,1)	(2,1,1)	(1,1,3)	(1,3,1)	(3,1,1)	(1,1,4)	(1,4,1)	(4,1,1)
$P_{22}(\boldsymbol{z})$	0,021	0,011	0,011	0,011	0,015	0,015	0,015	0,009	0,009	0,009
$\boldsymbol{z}$	(1,2,2)	(2,1,2)	(2,2,1)	(1,2,3)	(1,3,2)	(2,1,3)	(2,3,1)	(3,1,2)	(3,2,1)	(1,2,4)
$P_{22}(\boldsymbol{z})$	0,009	0,009	0,009	0,011	0,011	0,011	0,011	0,011	0,011	0,011
$\boldsymbol{z}$	(1,4,2)	(2,1,4)	(2,4,1)	(4,1,2)	(4,2,1)	(1,3,3)	(3,1,3)	(3,3,1)	(1,3,4)	(1,4,3)
$P_{22}(\boldsymbol{z})$	0,011	0,011	0,011	0,011	0,011	0,031	0,031	0,031	0,012	0,012
$\boldsymbol{z}$	(3,1,4)	(3,4,1)	(4,1,3)	(4,3,1)	(1,4,4)	(4,1,4)	(4,4,1)	(2,2,2)	(2,2,3)	(2,3,2)
$P_{22}(\boldsymbol{z})$	0,012	0,012	0,012	0,012	0,017	0,017	0,017	0,011	0,012	0,012
$\boldsymbol{z}$	(3,2,2)	(2,2,4)	(2,4,2)	(4,2,2)	(2,3,3)	(3,2,3)	(3,3,2)	(2,3,4)	(2,4,3)	(3,2,4)
$P_{22}(\boldsymbol{z})$	0,012	0,017	0,017	0,017	0,031	0,031	0,031	0,013	0,013	0,013
$\boldsymbol{z}$	(3,4,2)	(4,2,3)	(4,3,2)	(2,4,4)	(4,2,4)	(4,4,2)	(3,3,3)	(3,3,4)	(3,4,3)	(4,3,3)
$P_{22}(\boldsymbol{z})$	0,013	0,013	0,013	0,019	0,019	0,019	0,068	0,015	0,015	0,015
$\boldsymbol{z}$	(3,4,4)	(4,3,4)	(4,4,3)	(4,4,4)	—	—	—	—	—	—
$P_{22}(\boldsymbol{z})$	0,011	0,011	0,011	0,021	—	—	—	—	—	—

На рисунке 3 приведены графики законов распределения ИКК метода СМС для гипотез 1 и 2. За счет иных агрегирующих свойств метода СПС график $P_{21}(q)$ в отличие от $P_{11}(q)$ имеет резко несимметричную форму; $Mo_{21}(q)$ = 0,430. Линия $P_{21}(q)$ немонотонна на интервалах $[0; Mo_{21}(q)]$ и $[Mo_{21}(q); 1]$. В силу нелинейного роста значений ИКК метода СМС по оси рангов, в отличие от $P_{12}(q)$, график $P_{22}(q)$ несимметричен: $Mo_{221}(q) = 0{,}430$, $Mo_{222}(q) = 0{,}507$; $0{,}5 - Mo_{221}(q) \neq Mo_{222}(q) - 0{,}5$. Подъем графика от $q = 0$ к $Mo_{221}(q)$ и его последующий спад от $Mo_{222}(q)$ к $q = 1$ по той же причине нелинеен.

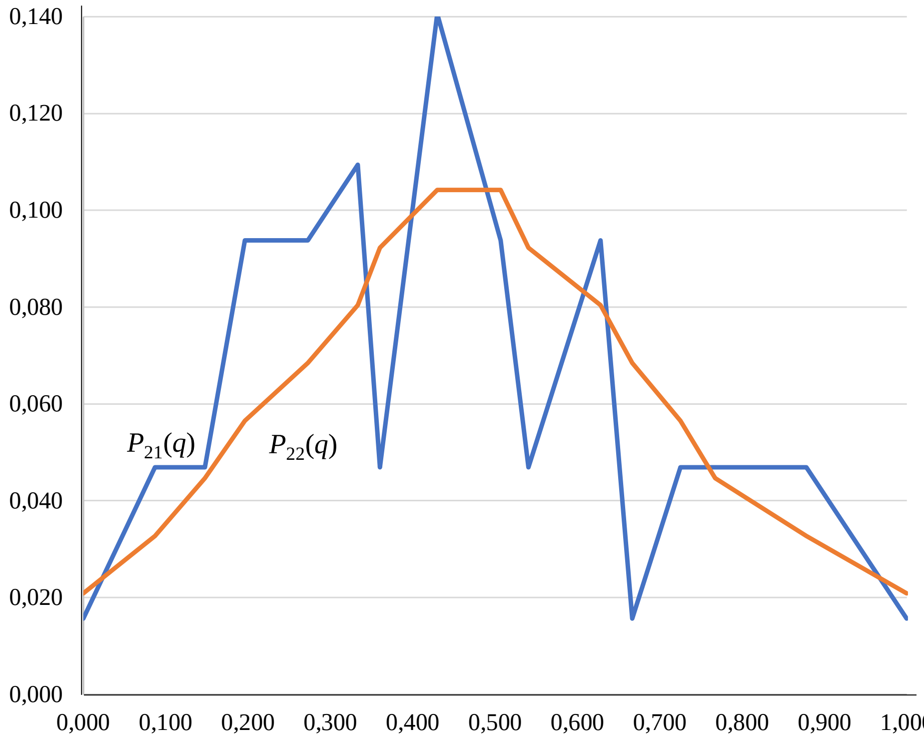

Рис. 3. Графики законов распределения ИКК метода СМС для гипотез 1 и 2

ИКК метода НПА. Как указывалось выше, в функционально законченном виде метод описан в работах [9–12]. На практике очень широко распространены некомпенсаторные предпочтения ЛПР в отношении самых разных объектов сравнения. Например, квартира с соседями-маргиналами практически для всех ЛПР вряд ли будет равна по предпочтению квартире с социально благополучными соседями, даже если первая расположена значительно ближе к метро или имеет более качественный ремонт. Кандидат на трудоустройство с явными признаками социопатии для работодателя вряд ли будет равен по предпочтению внешне адекватному кандидату даже при объективно более высоких профессиональных качествах первого. Данный ряд примеров можно продолжать неопределенно долго. Главной особенностью метода НПА является то, что ранжированный (т. е. лексикографически упорядоченный по возрастанию компонент [7]) вектор ЧК с любыми, но одинаковыми оценками $(j, j, \dots, j)$, где $j \in [2;\ m-1]$ всегда будет доминировать по предпочтению над ранжированным вектором ЧК $(j-1;\ m, \dots, m)$, в котором всего одна оценка на единицу меньше j, а остальные оценки – максимальные. С некоторой долей упрощения можно утверждать, что НПА – единственный метод агрегации, обеспечивающий учет некомпенсаторных предпочтений ЛПР во всем диапазоне значений каждой из компонент вектора ЧК – в отличие, например, от метода СМС, где некомпенсаторный характер выражен во всем диапазоне ЧК лишь опосредованно.

Поясним данное утверждение следующим примером. Пусть вектор $\boldsymbol{z}_1$ состоит из двух одинаковых оценок a, не равных ни 1, ни m, и третьей произвольной оценки b: $\boldsymbol{z}_1 = (a, a, b)$; $a \in [2; m-1]$; $b \in [1; m]$. Тогда согласно формуле (5):

$$q_2(\boldsymbol{z}_1) = \frac{\left((ba^2)^{1/3} - 1\right)}{3} = f(a^2). \qquad (5.1)$$

Определим величину $c \in [1; m-2]$, такую, что $a - c \geq 1$; $a + c \leq m$. Уменьшим первую оценку на c; вторую оценку увеличим на c; третью оценку оставим неизменной. Получим вектор $\boldsymbol{z}_2 = (a-c, a+c, b)$, для которого согласно формулам (5), (5.1):

$$q_2(\boldsymbol{z}_2) = \frac{((b(a-c)(a+c))^{1/3} - 1)}{3} = f\big((a-c)(a+c)\big) = f(a^2 - c^2).$$

Как следует из формулы (5.1), функция $f(\cdot)$ – монотонно возрастающая. Следовательно, $q_2(\boldsymbol{z}_2) < \\ < q_1(\boldsymbol{z}_1)$, т. е. одновременное уменьшение одной оценки и увеличение другой оценки с тем же значением на одну и ту же величину приводит к уменьшению значения ИКК. Чем больше c при заданном a, тем больше данное уменьшение (т. е. некомпенсаторное свойство ИКК).

Вместе с тем, если значения увеличиваемой и уменьшаемой оценки не равны, указанное некомпенсаторное свойство проявится только при некоторых дополнительных условиях для значений уменьшаемой и увеличиваемой оценок и величины их изменения. Поэтому метод СМС в общем случае является некомпенсаторным лишь опосредованно.

Сравнительно редкое практическое применение метода НПА для формирования ИКК по сравнению с методами ВСК и (отчасти) СМС при его несомненном подавляющем превосходстве в части отражения некомпенсаторных предпочтений ЛПР объясняется его сравнительной новизной, трудно понимаемой сутью для ЛПР без подготовки в области теории принятия решений, значительно бóльшим объемом вычислений либо табулирования для расчета значений ИКК.

Ниже, опираясь на [9–12], кратко изложим методику расчета q_3, опуская подробно раскрытую в указанных работах аксиоматику метода НПА. Обозначим $\boldsymbol{z}^*$ ранжированный (т. е. лексикографически упорядоченный по возрастанию) вектор ЧК $\boldsymbol{z}$. В силу указанной выше неразличимости частных оценок при формировании ИКК всеми рассматриваемыми методами, $\boldsymbol{z}^*$ будет эквивалентен по предпочтению всем порождающим $\boldsymbol{z}^*$ векторам $\boldsymbol{z}$. Например, векторы $\boldsymbol{z}_1 = (1,2,2)$, $\boldsymbol{z}_2 = (2,1,2)$, $\boldsymbol{z}_3 = (2,2,1)$ будут эквивалентны по предпочтению ранжированному вектору $\boldsymbol{z}^* = (1,2,2)$. Соответственно, далее все операции для расчета значения q_3 будут производиться с ранжированными векторами ЧК: $q_3 = f(\boldsymbol{z}^*)$.

Предварительно необходимо определить ранг r_{3i} каждого из векторов $\boldsymbol{z}_i^*$; $i \in [1; |Z^*|]$ в ряду $\boldsymbol{z}^*$, подвергнутых лексиминному упорядочению «слева направо» [1]. Максимальное значение $r_{3\max} = |Z^*|$ зависит от значений n и m (см. выше). Оно соответствует вектору $\boldsymbol{z}_{\max} = (m, m, \dots, m)$ и определяется по формуле из работ [11, 12]:

$$r_{3\max} = |Z^*| = C_{n+m-1}^{m-1} = \frac{(n+m-1)!}{n!\,(m-1)!}. \quad (6)$$

В рассматриваемом случае $m = 4, r_{3\max} = 20$ для $n = 3$. Определить r_{3i} можно двумя способами.

1) Лексиминное упорядочение [12] всех $\boldsymbol{z}_r^*$, $r \in [1, \dots, r_{\max}]$.

После упорядочения каждому $\boldsymbol{z}_r^* \in Z^*$; $r \in [1, \dots, |Z^*|]$ присваивается ранг $r_3(\boldsymbol{z}_r^*) \in [1, \dots, r_{3\max}]$, соответствующий номеру $\boldsymbol{z}_r^*$ в упорядоченном ряду от $(1,1, \dots, 1)$ до $\boldsymbol{z}_{\max}$, для чего следует:

а) исходя из заданных значений n и m, выписать все возможные значения ранжированных векторов ранговых оценок $\boldsymbol{z}_r^*$; $r \in [1, \dots, r_{3\max}]$, где $r_{3\max}$ определяется по формуле (6);

б) упорядочить все $\boldsymbol{z}_r^*$ по возрастанию предпочтения.

Алгоритм упорядочения описан в [11, 12]: необходимо последовательно выписывать один за другим все $\boldsymbol{z}^* \in Z^*$ вида:

$$\underbrace{1, \dots, 1,}_{n-n_1} \; \underbrace{2, \dots, 2}_{n_1-n_2}, \; \underbrace{3, \dots, 3,}_{n_2-n_3} \; \underbrace{m-1, \dots, m-1,}_{n_{m-2}-n_{m-1}} \; \underbrace{m, \dots, m}_{n_{m-1}},$$

где $0 \le n_1 \le n$, $0 \le n_2 \le n_1$, $0 \le n_3 \le n_2$, …, $0 \le n_{m-2} \le n_{m-3}$, $0 \le n_{m-1} \le n_{m-1}$, а число под каждой из фигурных скобок означает длину соответствующего подвектора, состоящего из одинаковых оценок. Последовательность, в которой выписываются указанные выше векторы, идет слева направо: n_1 последовательно принимает значения $0,1, \dots, n$. Для каждой фиксированной пары значений $\{n_1;\ n_2\}$ n_3 последовательно принимает все значения $0,1, \dots, n_2$. Далее алгоритм продолжается методом индукции;

в) присвоить каждому из упорядоченных векторов $\boldsymbol{z}_r^*$ ранг $r_3(\boldsymbol{z}_r^*) \in [1, \dots, r_{3\max}]$, соответствующий его порядковому номеру после лексиминного упорядочения.

Описанный способ позволяет достаточно быстро ранжировать все $\boldsymbol{z}_r^*$, проведя лексиминное упорядочение вручную (при небольших значениях n, m) либо средствами Microsoft Excel.

2) Прямой расчет ранга $r_3(\boldsymbol{z}^*)$ для любых $n, m > 2$. Формула для вычисления $r(\boldsymbol{z}^*)$ приводится без доказательства в работе [10] и доказывается в работах [12, 15, 19]. Ниже она приводится согласно работе [19]:

$$r_3(\boldsymbol{z}^*) = \sum_{i=1}^{m-1} C_{n-W_i(\boldsymbol{z}^*)+m-i-1}^{m-i} + 1. \quad (7)$$

Здесь:

– $W_k(\boldsymbol{z}^*)$ – количество компонент $\boldsymbol{z}^*$ со значениями не более k:

$$k \in [1; m];$$
$$W_k(\boldsymbol{z}^*) = |\{i \in [1; n] : z_i \le k\}|;$$

– C_a^b – число сочетаний из a по b, где под a и b соответственно понимаются нижний и верхний индексы числа сочетаний под знаком суммы в формуле (7); для некоторых векторов $\boldsymbol{z}^*$ в данной формуле возникает ситуация $b = a + 1$, не предусмотренная классическим определением числа сочетаний в комбинаторике; для компактности формулы (7), ее автор доопределяет число сочетаний значением, учитывающим указанную ситуацию (см. работы [10, 12, 15, 19]):

$$b \le a \mid C_a^b = \frac{a!}{b!\,(a-b)!};$$
$$b = a + 1 \mid C_a^b = 0.$$

После ранжирования $z \to \boldsymbol{z}^*$ значение ИКК $q_3(\boldsymbol{z}^*)$ находится нормировкой ранга r_3 вектора $\boldsymbol{z}^*$ к диапазону $[0; 1]$:

$$q_3(\boldsymbol{z}^*) = q_{3r} = \frac{r_3(\boldsymbol{z}^*) - 1}{r_{3\max} - 1}. \tag{8}$$

В силу описанного выше алгоритма определения ранга нормированных векторов и последующего определения значений ИКК методом НПА для них очевидно, что в данном случае значение кратности k_{3r} для каждого из значений r_3 означает количество уникальных векторов $\boldsymbol{z}$, после ранжирования дающих одно и то же значение ранжированного вектора $\boldsymbol{z}_r^*$.

Значения q_{3r}, рассчитанные по формуле (8), кратности k_{3r} векторов $\boldsymbol{z}_t$, соответствующих значениям q_{3r}, значения $P_{21}(q)$, рассчитанные по формуле (2), и $P_{22}(q)$ для всех рангов $r = r_3(\boldsymbol{z}^*) \in [1; r_{3\max}]$ приведены в таблице 5. Рассчитанные по формуле (3) значения $P_{32}(\boldsymbol{z})$ даны в таблице 6. На рисунке 4 приведены графики законов распределения ИКК метода НПА для гипотез 1 и 2.

Таблица 5. Метод НПА: Рассчитанные значения параметров ИКК и законы распределения ИКК для гипотез 1 и 2

$\boldsymbol{z}^*$	r	q_{3r}	k_{3r}	$P_{31}(q)$	$P_{32}(q)$
(1,1,1)	1	0	1	0,016	0,017
(1,1,2)	2	0,053	3	0,047	0,024
(1,1,3)	3	0,105	3	0,047	0,031
(1,1,4)	4	0,158	3	0,047	0,039
(1,2,2)	5	0,211	3	0,047	0,046
(1,2,3)	6	0,263	6	0,094	0,054
(1,2,4)	7	0,316	6	0,094	0,061
(1,3,3)	8	0,368	3	0,047	0,069
(1,3,4)	9	0,421	6	0,094	0,076
(1,4,4)	10	0,474	3	0,047	0,083
(2,2,2)	11	0,526	1	0,016	0,083
(2,2,3)	12	0,579	3	0,047	0,076
(2,2,4)	13	0,632	3	0,047	0,069
(2,3,3)	14	0,684	3	0,047	0,061
(2,3,4)	15	0,737	6	0,094	0,054
(2,4,4)	16	0,789	3	0,047	0,046
(3,3,3)	17	0,842	1	0,016	0,039
(3,3,4)	18	0,895	3	0,047	0,031
(3,4,4)	19	0,947	3	0,047	0,024
(4,4,4)	20	1,000	1	0,016	0,017

Таблица 6. Апостериорный закон распределения вектора частных оценок для метода НПА и гипотезы 2

$\boldsymbol{z}$	(1,1,1)	(1,1,2)	(1,2,1)	(2,1,1)	(1,1,3)	(1,3,1)	(3,1,1)	(1,1,4)	(1,4,1)	(4,1,1)
$P_{32}(\boldsymbol{z})$	0,017	0,008	0,008	0,008	0,010	0,010	0,010	0,013	0,013	0,013
$\boldsymbol{z}$	(1,2,2)	(2,1,2)	(2,2,1)	(1,2,3)	(1,3,2)	(2,1,3)	(2,3,1)	(3,1,2)	(3,2,1)	(1,2,4)
$P_{32}(\boldsymbol{z})$	0,015	0,015	0,015	0,009	0,009	0,009	0,009	0,009	0,009	0,010
$\boldsymbol{z}$	(1,4,2)	(2,1,4)	(2,4,1)	(4,1,2)	(4,2,1)	(1,3,3)	(3,1,3)	(3,3,1)	(1,3,4)	(1,4,3)
$P_{32}(\boldsymbol{z})$	0,010	0,010	0,010	0,010	0,010	0,023	0,023	0,023	0,013	0,013
$\boldsymbol{z}$	(3,1,4)	(3,4,1)	(4,1,3)	(4,3,1)	(1,4,4)	(4,1,4)	(4,4,1)	(2,2,2)	(2,2,3)	(2,3,2)
$P_{32}(\boldsymbol{z})$	0,013	0,013	0,013	0,013	0,028	0,028	0,028	0,083	0,025	0,025
$\boldsymbol{z}$	(3,2,2)	(2,2,4)	(2,4,2)	(4,2,2)	(2,3,3)	(3,2,3)	(3,3,2)	(2,3,4)	(2,4,3)	(3,2,4)
$P_{32}(\boldsymbol{z})$	0,025	0,023	0,023	0,023	0,020	0,020	0,020	0,009	0,009	0,009
$\boldsymbol{z}$	(3,4,2)	(4,2,3)	(4,3,2)	(2,4,4)	(4,2,4)	(4,4,2)	(3,3,3)	(3,3,4)	(3,4,3)	(4,3,3)
$P_{32}(\boldsymbol{z})$	0,009	0,009	0,009	0,015	0,015	0,015	0,039	0,010	0,010	0,010
$\boldsymbol{z}$	(3,4,4)	(4,3,4)	(4,4,3)	(4,4,4)	—	—	—	—	—	—
$P_{32}(\boldsymbol{z})$	0,008	0,008	0,008	0,017	—	—	—	—	—	—

Из таблицы 5 ясно виден некомпенсаторный характер метода НПА: вектор (2, 2, 2) имеет на единицу больший ранг (и большее значение q_{3r}), чем вектор (1, 4, 4); аналогично вектор (3, 3, 3) имеет на единицу больший ранг (и большее значение q_{3r}), чем вектор (2, 4, 4). Также, в силу принципиальных отличий метода НПА от ВСК и СМС, а именно упорядочения векторов ЧК $\boldsymbol{z}$ вместо арифметических операций с их компонентами, график $P_{31}(q)$ принципиально отличается от графиков $P_{11}(q)$, $P_{21}(q)$ тем, что имеет четыре моды, соответствующие максимальному значению кратности $k_3 = 6$. Этим модам соответствуют $\boldsymbol{z}^*$, состоящие из трех разных компонент: (1, 2, 3); (1, 2, 4); (1, 3, 4); (2, 3, 4). При этом график $P_{32}(q)$ в отличие от $P_{22}(q)$ симметричен.

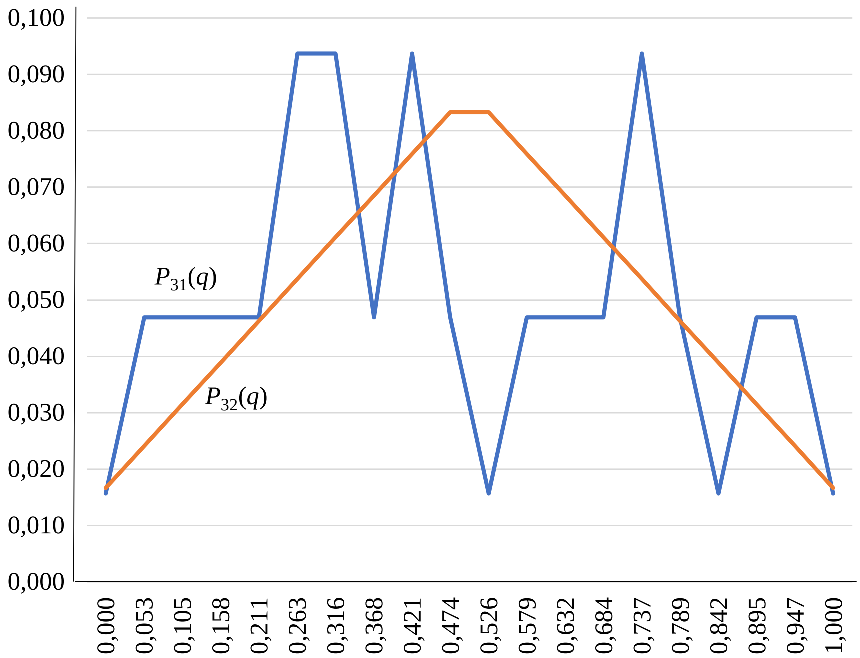

Рис. 4. Графики законов распределения ИКК метода НПА для гипотез 1 и 2

Энтропийный анализ вектора ЧК и ИКК

Качественную оценку потерь исходной информации при агрегации вектора ЧК в скалярный ИКК для первой гипотезы о законе распределения $P(\boldsymbol{z})$ можно сделать, сравнив $|Z|$ и $r_{i\max}$; $i \in [1;3]$. Для рассматриваемого случая $n = 3$; $m = 4$; $|Z| = 64$; $r_{1\max} = 10$; $r_{2\max} = 16$; $r_{3\max} = 20$. Представляется интуитивно верным, что чем больше $r_{i\max}$, тем меньше потеря информации при скаляризации. Однако для гипотезы 2 о законе распределения $P(\boldsymbol{z})$ данное предположение о потере информации уже неочевидно. Также важно оценить потерю информации количественно, поскольку для прикладного выбора вида ИКК значение имеет не только абсолютная потеря, но и ее удельное значение, приведенное к исходному количеству информации в векторе ЧК, а также относительная потеря информации, определяемая как разность в удельной потере информации для разных видов ИКК. Например, относительную потерю информации в 1 % ЛПР может посчитать несущественной, а разницу в 10 % – уже значительной.

Здесь и далее обозначим индексами i, j номера разных видов ИКК: $i, j \in [1;3]$; $j \neq i$. Для гипотезы 1 обозначим количество информации в векторе ЧК как $I_1(\boldsymbol{z})$. Для гипотезы 2 обозначим количество информации в векторе ЧК как $I_{i2}(\boldsymbol{z})$, так оно будет различным для разных ИКК.

Обозначим $I_{ik}(q, \boldsymbol{z})$ количество информации о $\boldsymbol{z}$, содержащееся в интегральном показателе $q_i(\boldsymbol{z})$ (здесь и далее k – номер гипотезы; $k = \{1; 2\}$). Тогда удельную потерю информации ΔI_{i1} для i-го ИКК при гипотезе 1 можно определить как:

$$\Delta I_{i1} = 1 - \frac{I_{i1}(q, \boldsymbol{z})}{I_1}. \quad (9)$$

Для гипотезы 2 ΔI_{i2} определяется следующим образом:

$$\Delta I_{i2} = 1 - \frac{I_{i2}(q, \boldsymbol{z})}{I_{i2}}. \tag{10}$$

Относительная потеря информации вычисляется как разница в удельной потере информации между ИКК разных типов для обеих гипотез:

$$\Delta I_{ijk} = \Delta I_{ik} - \Delta I_{jk}, \tag{11}$$

где $i < j$.

Для определения I_1, I_{i2}, $I_{ik}(q, \boldsymbol{z})$, ΔI_{ijk} воспользуемся научным аппаратом теории информации. Обозначим $I(q, \boldsymbol{z})$ количество информации о $\boldsymbol{z}$, содержащееся в интегральном показателе $q(\boldsymbol{z})$. В работах [16–18] введено понятие количества информации и даны формулы для его расчета. Интересующий нас показатель $I(q, \boldsymbol{z})$ находится по выражению из указанных работ:

$$I(q, \boldsymbol{z}) = H(\boldsymbol{z}) - H_q(\boldsymbol{z}), \tag{12}$$

где $H(\boldsymbol{z})$ – априорная информационная энтропия вектора $\boldsymbol{z}$; $H_q(\boldsymbol{z})$ – его же условная информационная энтропия при условии, что значение q известно.

Для определения $H_q(\boldsymbol{z})$ рассмотрим два случайных события: появление конкретной реализации $\boldsymbol{z}_i$ вектора $\boldsymbol{z}$ и $q(\boldsymbol{z}_i)$ – появление конкретного значения ИКК q. Наступление события $\boldsymbol{z}$ полностью определяет исход события q: зная конкретное значение $\boldsymbol{z}_i$, мы непосредственно находим по нему значение $q(\boldsymbol{z}_i)$. Как указано в [17], в данном случае имеет место равенство $H_q(\boldsymbol{z}) = H(\boldsymbol{z}) - H(q)$.

Следовательно, формула (12) преображается в:

$$I(q, \boldsymbol{z}) = H(\boldsymbol{z}) - \big(H(\boldsymbol{z}) - H(q)\big) = H(q), \tag{13}$$

так что количество информации об исходном векторе ЧК, содержащееся в ИКК $q(\boldsymbol{z})$, равно информационной энтропии $H(q)$ самого ИКК.

Как указывалось ранее, распределение случайного вектора $\boldsymbol{z}$ на множестве его возможных значений Z также будет дискретным равномерным для всех $j \in [1;\ |Z|]$:

$$p(\boldsymbol{z}_j) = \frac{1}{|Z|} = p. \tag{14}$$

В рассматриваемом случае $n = 3; m = 4; |Z| = 64; p = 1/64 \approx 0{,}0156$. Вектор ЧК $\boldsymbol{z}$ одинаково распределен для всех ИКК, поэтому исходное полное количество информации $I_1(\boldsymbol{z})$ в $\boldsymbol{z}$, согласно [17], будет равно энтропии $H(\boldsymbol{z})$. С учетом (14) $H_1(\boldsymbol{z})$ определяется по формуле Хартли [17]:

$$I_1(\boldsymbol{z}) = H_1(\boldsymbol{z}) = \mathrm{lb}(|Z|) = \mathrm{lb}(m^n) = n\mathrm{lb}(m) = 3\mathrm{lb}(4) = 6\ \text{бит}.$$

Так как распределение $P_1(q)$ уже известно для всех трех ИКК, найдем $I_{i1}(q, \boldsymbol{z})$ по формуле Шеннона [17], где, как и ранее, i – номер ИКК:

$$I_{i1}(q, z) = H_{i1}(q) = -\sum_{k=1}^{r_{i\max}} P_{i1}(q = q_{ik})\mathrm{lb}\, P_{i1}(q = q_{ik}). \tag{15}$$

Выполним расчет $I_{i1}(q,\boldsymbol{z})$, ΔI_{i1}, ΔI_{ij1} для всех ИКК по формулам (15), (9), (11), используя данные о $P_{1i}(q)$ из таблиц 1, 3, 5 соответственно. Результаты расчета исходного количества информации, содержавшейся в векторной оценке; количества информации о векторной оценке, содержащегося в ИКК; удельной потери информации при скаляризации приведены в таблице 7. Результаты расчета относительной потери информации при скаляризации разными методами приведены в таблице 8.

Так как при гипотезе 2 апостериорный (по отношению к q) закон распределения $P(\boldsymbol{z})$ перестает быть дискретным равномерным и различен для разных видов ИКК, исходную информацию I_{i2} вектора ЧК, равную его энтропии $H_{i2}(\boldsymbol{z})$, необходимо рассчитывать по формуле Шеннона:

$$I_{i2} = H_{i2}(\boldsymbol{z}) = -\sum_{k=1}^{|Z|} P_{i2}(\boldsymbol{z} = \boldsymbol{z}_k)\mathrm{lb}\ P_{i2}(\boldsymbol{z} = \boldsymbol{z}_k). \quad (16)$$

Информация о показателе $I_{i2}(q,z)$ также находится по формуле Шеннона аналогично формуле (15) где, как и ранее, i – номер ИКК:

$$I_{i2}(q,z) = H_{i2}(q) = -\sum_{k=1}^{r_{i\max}} P_{i2}(q = q_{ik})\mathrm{lb}\,P_{i2}(q = q_{ik}). \quad (17)$$

Выполним расчет I_{i2}, $I_{i2}(q,\boldsymbol{z})$, ΔI_{i2}, ΔI_{ij2} для всех ИКК по формулам (17), (16), (10), (11), используя данные о $P_{2i}(q)$ из таблиц 1, 3, 5 и данные о $P_{i2}(\boldsymbol{z})$ из таблиц 2, 4, 6 соответственно. Результаты расчета исходного количества информации, содержавшейся в векторной оценке; количества информации о векторной оценке, содержащегося в ИКК; удельной потери информации при скаляризации приведены в таблице 7. Результаты расчета относительной потери информации при скаляризации разными методами приведены в таблице 8.

Таблица 7. Исходное количество информации, содержавшееся в векторной оценке; количество информации о векторной оценке, содержащееся в ИКК; удельная потеря информации при скаляризации

Метод ИКК	$I_1(\boldsymbol{z})$, бит	$I_{i1}(q,\boldsymbol{z})$, бит	ΔI_{i1}	I_{i2}, бит	$I_{i2}(q,\boldsymbol{z})$, бит	ΔI_{i2}
ВСК (i = 1)	6	2,98	0,503	5,96	3,15	0,471
СПС (i = 2)		3,76	0,374	5,84	3,85	0,344
НПА (i = 3)		4,14	0,310	5,77	4,18	0,275

Таблица 8. Относительная потеря информации при скаляризации разными методами

	ΔI_{ij1}		ΔI_{ij2}	
Метод ИКК	СПС (j = 2)	НПА (j = 3)	СПС (j = 2)	НПА (j = 3)
ВСК (i = 1)	0,129	0,193	0,127	0,196
СПС (i = 2)	—	0,064	—	0,069

Анализ полученных результатов

Приведенные в таблицах 7–10 результаты моделирования показывают, что интуитивная качественная оценка потерь информации при скаляризации вектора ЧК в ИКК полностью подтверждается количественно для первой гипотезы:

$$\begin{cases} r_{1\max} < r_{2\max} < r_{3\max} \\ \Delta I_{11} > \Delta I_{21} > \Delta I_{31} \end{cases}.$$

EDN: XFFPON
URL: https://vestnik-sut.ru/2025-4/C05.pdf

Следует отметить, что для аутсайдера – ИКК метода ВСК – потеря исходной информации при скаляризации составляет для гипотезы 1 более 50 %, а для лидера – ИКК метода НПА – 31 %, т. е. относительная потеря информации между ИКК методов ВСК и НПА составляет 19,3 %, что является значимой долей для большинства практических случаев. ИКК метода СМС, как и предполагалось из интуитивных качественных соображений, находится посередине между лидером и аутсайдером.

При этом даже более значимым является полное соответствие описанных выше результатов итогам моделирования для гипотезы 2, где основания для интуитивной качественной оценки потерь информации отсутствовали. Из сопоставления рисунков 2 и 4 видно, насколько близки законы распределения $P_{11}(Q)$ и $P_{12}(Q)$ и насколько при этом различаются распределения $P_{31}(Q)$ и $P_{32}(Q)$. Однако, как удельная, так и относительная потеря информации для гипотезы 2 достаточно точно совпадают с таковыми для гипотезы 1: удельная – с точностью до второго знака, а относительная – до третьего.

Из указанного факта следует, что разработанная автором методика количественной оценки потери информации при скаляризации вектора ЧК в ИКК не только подтверждается моделированием, но и является робастной (в значении, указанном в «Словаре социологической статистики»[1]). Также следует отметить, что описанная в настоящей работе методика универсальна в том смысле, что не налагает никаких дополнительных условий на сравниваемые ИКК. Например, разница в виде кривых безразличия и динамики роста предпочтений ЛПР по ранговой шкале ЧК указывалась исключительно в качестве справочной информации про степень «некомпенсаторности» ИКК, построенных различными методами: от нулевой для метода ВСК, через слабо выраженную для СПС до полной для НПА. При моделировании не делалось никаких гипотез относительно как «некомпенсаторности», так и динамики роста предпочтений ЛПР. Однако полученные результаты явно свидетельствуют о сильной положительной корреляции между степенью «компенсаторности» различных ИКК и удельной потерей информации при скаляризации вектора ЧК в ИКК для них же.

Так как по определению метод ВСК можно считать абсолютно компенсаторным, а НПА – абсолютно некомпенсаторным, примем значение «компенсаторнорности» метода ВСК равным 1 усл. ед. Тогда значение «компенсаторности» метода НПА будет равно 0 усл. ед. Так как по всем проанализированным параметрам метод СМС занимает промежуточное положение между ВСК и НПА, присвоим ему значение «компенсаторности», равное 0,5 усл. ед. При указанном допущении рассчитанный по гипотезам 1 и 2 коэффициент линейной корреляции Пирсона между указанными выше значениям «компенсаторности» и удельной потерей информации для сравниваемых ИКК равен 0,96 – т. е. означает практически линейную зависимость.

Интуитивным объяснением указанной корреляции является снижение максимального ранга ИКК при увеличении степени «некомпенсаторности» за счет уменьшения количества неразличимых по качеству альтернатив. Однако аналогично рассмотренному в настоящей работе методу данная интуитивная гипотеза требует количественного подтверждения путем дополнительных исследований, что будет положено в основу дальнейшей научной работы автора в указанном направлении.

Заключение

Для широко распространенной на практике задачи сравнения альтернатив по качеству, определяемому для ЛПР набором важных для него признаков – ЧК, доступная литература по теории принятия решений содержит описания различных ИКК, скаляризующих вектор ЧК. В литературе исследованы условия применимости тех или иных ИКК для построения как ординальных (порядковых), так и кардинальных (абсолютных) оценок качества, их отличительные особенности – вид кривых безразличия, требования к виду взаимного влияния оцениваемых ЧК друг на друга при формировании ИКК и пр. Однако в ней отсутствует какая-либо методика прямого количественного сравнения ИКК по степени потери исходной информации, изначально присутствующей в векторе ЧК и неизбежно редуцируемой при скаляризации вектора ЧК в ИКК.

[1] Робастный // Словарь социологической статистики. URL: https://sociological_statistics.academic.ru/208/робастный (дата обращения 18.12.2025).

EDN: XFFPON
URL: https://vestnik-sut.ru/2025-4/C05.pdf

В настоящей работе автором впервые предложен научно обоснованный энтропийный показатель и его количественная оценка для различных методов свертки частных показателей в ИКК, не зависящей от конкретных характеристик, особенностей и свойств сравниваемых ИКК. Построена вероятностная модель объекта исследования, адекватная реальным ситуациям сравнения альтернатив, сформулированы и промоделированы различные гипотезы априорного распределения ЧК сравниваемых альтернатив.

Помимо качественного подтверждения интуитивной гипотезы об обратной пропорциональности указанной удельной потери информации мощности множества значений ИКК, путем моделирования для сформулированных гипотез определена удельная и относительная потеря информации при скаляризации вектора ЧК в ИКК для трех различных ИКК, применяемых на практике и имеющих существенные отличительные особенности механизма формирования.

Определено, что ИКК метода НПА с точки зрения удельной потери исходной информации на 30 % эффективнее, чем широко распространенный на практике ИКК метода ВСК. Показано, что разработанный метод является робастным, т. е. слабо чувствительным к априорным вероятностных характеристикам модели объекта исследования.

Сформулирована эвристически и определена количественно гипотеза сильной положительной корреляции между степенью «компенсаторности» ИКК и величиной удельной потери информации при его применении: рассчитанный для усредненной по обеим моделируемым гипотезам линейный коэффициент Пирсона для указанных величин составляет 0,96, т. е. практически линейную зависимость.

Разработанный показатель универсален, поскольку не зависит ни от физической природы сравниваемых альтернатив, ни от их количественных характеристик, и может применяться в широкой сфере практических ситуаций принятия решений на основе научно обоснованных методов.

Автор выражает благодарность д. т. н., профессору С. И. Макаренко как научному руководителю – за побуждение автора к исследовательской работе и методологическую поддержку; д. ф.-м. н., профессору В. В. Чистякову как создателю метода порогового некомпенсаторного агрегирования в законченном виде – за диалог с автором и направление его научного поиска в нужную сторону; а также д. т. н., профессору С. В. Микони как автору литературы по теории принятия решений – за широкий охват и высокую степень абстракции научных трудов, для постижения которых автор был вынужден глубоко изучить предметную область.

Литература

1. Микони С. В. Теория принятия управленческих решений: учебное пособие. СПб.: Лань, 2015. 448 с. EDN: VLRHIZ
2. Справочник научных терминов и математических обозначений / Сост. С. И. Макаренко. СПб.: Наукоемкие технологии, 2025. 348 с. EDN: ZDRGGH
3. Ларичев О. И. Теория и методы принятия решений, а также Хроника событий в Волшебных Странах: учебник. М.: Логос, 2000. 296 с.
4. Кини Р. Л., Райфа Х. Принятие решений при многих критериях предпочтения и замещения. М.: Радио и связь, 1981. 560 с.
5. Подиновский В. В. Идеи и методы теории важности критериев в многокритериальных задачах принятия решений. М.: Наука, 2019. 103 с.
6. Фишберн П. С. Теория полезности для принятия решений. М.: Наука, 1981. 352 с.
7. Касаткин Ф. Ю. Некомпенсаторная интегральная оценка качества работы центров обработки вызовов // Системы управления, связи и безопасности. 2025. № 4. С. 200−243. DOI: 10.24412/2410-9916-2025-4-200-243. EDN: VJJSFM
8. Подиновский В. В., Потапов М. А. Метод взвешенной суммы критериев в анализе многокритериальных решений: Pro et Contra // Бизнес-информатика. 2013. № 3 (25). С. 41–48. EDN: RBWNYH
9. Калягин В. А., Чистяков В. В. Модель некомпенсаторного агрегирования с произвольным набором оценок // Доклады Академии наук. 2008. Т. 421. № 5. С. 607–610. EDN: JHLIIL

10. Чистяков В. В. Функция перечисления в многокритериальной задаче порогового агрегирования // Труды Математического центра им. Н. И. Лобачевского. 2009. Т. 38. С. 304–306.

11. Калягин В. А., Чистяков В. В. Аксиоматическая модель некомпенсаторного агрегирования. Препринт WP7/2009/01. Серия WP7. Теория и практика общественного выбора. М.: ГУ ВШЭ, 2009. 73 с. EDN: QJVQCZ

12. Aleskerov F. T., Chistyakov V. V., Kalyagin V.A. Social Threshold Aggregations // Social Choice and Welfare. 2010. Vol. 35. Iss. 4. PP. 627–646. DOI: 10.1007/s00355-010-0454-9. EDN: MXDNFD

13. Касаткин Ф. Ю. Об эффективном виде функции качества во взаимоотношениях заказчика и поставщика продукции военного назначения // Системы управления, связи и безопасности. 2025. № 3. С. 232–268. DOI: 10.24412/2410-9916-2025-3-232-268. EDN: GEYLHI

14. Разумников С. В. Модели поддержки принятия решений при выборе облачных ИТ-сервисов для внедрения на предприятии. Дис. … канд. техн. наук. Томск: ТПУ, 2016. 158 с. EDN: YJGSON

15. Aleskerov F. T., Chistyakov V. V. The Threshold Decision Making Effectuated by the Enumeration Preference Function // International Journal of Information Technology and Decision Making. 2013. Vol. 12. Iss. 6. PP. 1201–1222. DOI: 10.1142/S021962201350034X. EDN: SLGWTN

16. Колмогоров А. Н. Три подхода к определению понятия «Количество информации» // Проблемы передачи информации. 1965. Т. 1. № 1. С. 3–11.

17. Яглом А. М., Яглом И. М. Вероятность и информация. М.: Наука, 1973. 512 с.

18. Блинова И. В., Попов И. Ю. Теория информации: учебное пособие. СПб.: Университет ИТМО, 2018. 84 с. EDN: OLIWNI.

19. Chistyakov V. V., Chumakova K. O. Restoring indiffernce classes via ordinal numbers under the leximin and leximax preference orderings // Журнал Новой экономической ассоциации. 2018. № 3 (39). С. 12–31. EDN: VABFGG

Статья поступила 19 ноября 2025 г.
Одобрена после рецензирования 25 декабря 2025 г.
Принята к публикации 28 декабря 2025 г.

Информация об авторе

Касаткин Феликс Юрьевич – соискатель ученой степени кандидата технических наук, начальник Государственного бюджетного учреждения здравоохранения Запорожской области «Медицинский информационно-аналитический центр». E mail: fkasatkin@yandex.ru

Entropy Indicator and Its Quantitative Assessment for Various Methods of Convolution of Partial Indicators into an Integral Quality Criterion

F. Kasatkin

Medical Information and Analytical Center,
Melitopol, 272304, Russian Federation

Problem statement. *The article discusses the actual task of quantifying the loss of information that inevitably occurs when scalarizing an alternative vector quality assessment into an integral quality criterion (ICQ). This procedure is widely used in decision theory to obtain a linear order on a set of alternatives, but it is still associated with a reduction of the initial set and, as a result, with the loss of some information about the differences between them. In the known literature, there are no methods for direct quantitative comparison of various ICS according to the degree of such loss, which makes it difficult to reasonably choose an aggregation method for specific applications. The aim of the work is to develop and test a scientifically sound method for quantifying information loss during scalarization of a vector quality assessment, which would be universal and independent of the specific characteristics of the methods being compared.* ***Methods.*** *To achieve this goal, the scientific apparatus of information theory is used. A probabilistic model of the research object is constructed. Two hypotheses about the distribution laws of a random vector of particular quality criteria and three methods for forming an integral quality criterion are considered: weighted sum of criteria, power-law multiplicative convolution, and non-compensatory threshold aggregation.* ***The novelty elements*** *of the proposed method are the estimation of quantitative information losses during scalarization of the vector of partial quality estimates into an integral quality criterion by calculating a decrease in conditional information entropy, as well as probabilistic models of the research object for a priori and a posteriori determined distribution of possible values of partial quality estimates as part of the vector assessment.* ***Results.*** *Quantitative estimates of absolute, specific, and relative information loss were obtained for three methods under different hypotheses about the distribution of particular quality assessments. It is established that the method of non–compensatory threshold aggregation is characterized by the least loss of initial information, and the method of weighted sum of criteria is the largest. The relative loss of information between these methods is about 20 %, which is a significant amount. It is shown that the method is robust. Additionally, a strong (0.96) correlation was found between the degree of "compensatory" method and the amount of specific loss of information.* ***Practical significance.*** *The developed method is universal and can be used for quantitative comparison of any ICS, regardless of the physical nature of the alternatives being compared or their quantitative characteristics. The results obtained allow decision makers to make an informed choice in favor of one or another aggregation method, based not only on its qualitative features, but also on an objective quantitative assessment of the safety of the initial information. In particular, it has been confirmed that the use of MNPA makes it possible to significantly reduce information losses during scalarization compared to the widely used MVSK, which is especially important in tasks where a high degree of differentiation of alternatives is of critical importance.*

Key words: *comparison of alternatives, vector quality assessment, rank quality assessment, particular quality criteria, scalarization, integral quality criterion, information technology, quantity of information, specific loss of information, relative loss of information*

Information about Author

Kasatkin Felix – an Applicant for the Degree of Ph. D. of Engineering Sciences, Head of the Medical Information and Analytical Center. E-mail: fkasatkin@yandex.ru

EDN: XFFPON
URL: https://vestnik-sut.ru/2025-4/C05.pdf