УДК 517.9
EDN: XZBNAO

# Об оценке максимума модуля градиента решения квазилинейного параболического уравнения общего вида

**Мкртычян П. З.**

Санкт-Петербургский государственный университет телекоммуникаций им. проф. М. А. Бонч-Бруевича, Санкт-Петербург, 193232, Российская Федерация

***Актуальность.*** *Статья посвящена актуальной задаче оценки максимума модуля градиента решения квазилинейного параболического уравнения общего вида. Оценка максимума модуля градиента является важным звеном при доказательстве существования классического решения начально-краевых задач для квазилинейных эллиптических и параболических уравнений.* ***Цель исследования*** *заключается в получении локальной по временнóй переменной оценки максимума модуля градиента решения через максимум модуля самого решения и модуль градиента на параболической границе области без предположения так называемых условий ослабленного вхождения аргумента* $\boldsymbol{u}$ *(*$\boldsymbol{u}$ *– решение уравнения). Кроме того, оказалось, что указанная оценка получается без предположения во всей области условия С. Н. Бернштейна, которое заключается в том, что младшие члены уравнения растут по модулю градиента не более чем на два порядка быстрее главной части уравнения. Однако для получения оценки максимума модуля градиента решения на границе области требуется выполнимость условия С. Н. Бернштейна вблизи границы области. (В настоящей работе ограниченность решения и максимума модуля градиента решения на параболической границе области предполагаются выполненными, а также допускается вырождение главной части уравнения.) Основным* ***методом*** *доказательства является классический принцип максимума для параболических уравнений.* ***Результат.*** *В общем случае полученная оценка является локальной по временнóй переменной. Найдено такое значение* $\boldsymbol{T_0}$ *временнóй переменной* $\boldsymbol{t}$*, зависящее от констант, описывающих структуру уравнения, что для всех* $\boldsymbol{t}$*, удовлетворяющих неравенству* $\boldsymbol{0 \leq t < T_0}$*, максимум модуля градиента решения оценивается через максимум модуля градиента решения на границе области и константы, описывающие структуру уравнения. В случае ограниченности младших членов уравнения оценка является глобальной по времени.* ***Теоретическая значимость.*** *Результаты исследования представляют собой определенный вклад в теорию квазилинейных параболических уравнений общего вида.*

***Ключевые слова:*** *квазилинейные параболические уравнения общего вида, оценка максимума модуля градиента, условие ослабленного вхождения аргумента* $u$*, условие С. Н. Бернштейна*

## Введение

Настоящая работа посвящена оценке максимума модуля градиента решения квазилинейного параболического уравнения:

$$u_t - a_{ij}(x,t,u,u_x)u_{x_i x_j} + a(x,t,u,u_x) = 0, \tag{1}$$

**Библиографическая ссылка на статью:**
Мкртычян П. З. Об оценке максимума модуля градиента решения квазилинейного параболического уравнения общего вида // Вестник СПбГУТ. 2025. Т. 3. № 4. С. 4. EDN: XZBNAO
**Reference for citation:**
Mkrtychyan P. On the Estimation of the Maximum Modulus of the Gradient of a Solution to a Quasi-Linear Parabolic Equation of General Form // Herald of SPbSUT. 2025. Vol. 3. Iss. 4. P. 4. EDN: XZBNAO



EDN: XZBNAO
URL: https://vestnik-sut.ru/2025-4/C04.pdf

где $x = (x_1, \dots x_n)$; $u(x,t)$ – решение уравнения (1); $u_x = \left(u_{x_1}, \dots u_{x_1}\right)$. (Здесь и всюду ниже по повторяющимся индексам предполагается суммирование.)

В конце 50-х – начале 60-х годов прошлого века О. А. Ладыженской и Н. Н. Уральцевой [1–2] были получены локальные и глобальные оценки максимума модуля градиента решения эллиптического уравнения:

$$-a_{ij}(x,t,u,u_x)u_{x_i x_j} + a(x,t,u,u_x) \tag{2}$$

и уравнения (1) при условиях ограниченности модуля решения в области, в которой рассматривается уравнение, а также ограниченности модуля градиента решения на границе этой области. При этом относительно функций $a_{ij}(x,t,u,p)$ и $a(x,t,u,p)$, $p = (p_1, \dots p_n)$ предполагались выполненными условия $a_{ij} = a_{ji}$, а также:

$$\nu(1+|p|)^{m-2}|\xi|^2 \le a_{ij}\xi_i\xi_j \le \mu(1+|p|)^{m-2}|\xi|^2;\ m \ge 2;\ \nu,\mu > 0, \tag{3}$$

$$|a(x,t,u,p)| \le c(1+|p|)^m, \tag{4}$$

$$\left|\frac{\partial a_{ij}}{\partial p_k}\right|(1+|p|)^2 + \left|\frac{\partial a}{\partial p_k}\right| \le c(1+|p|)^{m-1}, \tag{5}$$

$$\left|\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k}\right|(1+|p|)^2 + \left|\frac{\partial a}{\partial x_k}\right| \le c(1+|p|)^m, \tag{6}$$

$$\left|\frac{\partial a_{ij}}{\partial u}\right| \le \varepsilon(1+|p|)^{m-2};\ -\frac{\partial a}{\partial u} \le\ \varepsilon(1+|p|)^m, \tag{7}$$

где константа ε в условиях (7) достаточно мала.

Условие малости константы ε, именуемое условием ослабленного вхождения аргумента $u$, является неестественным; оно снимается, если получена оценка константы Гёльдера решения уравнения. Однако, если для уравнений дивергентного вида оценки констант Гёльдера О. А. Ладыженской и Н. Н. Уральцевой (см. [1], а также список литературы в [2, 3]) были получены в конце 1950-х – начале 1960-х годов, то для уравнений общего вида оценок констант Гёльдера это сделано не было.

В конце 70-х – начале 80-х годов прошлого века Н. В. Крыловым и М. В. Сафоновым (см. [4], а также список литературы в [5]) был предложен метод получения оценок констант Гёльдера для решений линейных эллиптических уравнений.

О. А. Ладыженская и Н. Н. Уральцева применили метод Н. В. Крылова и М. В. Сафонова для получения оценок констант Гёльдера для решений уравнений (1) и (2) при $m = 2$ (см., например, [6–8]); тем самым, требование малости константы ε в условии (7) для таких уравнений было снято.

Если при $m > 2$ и условии равномерной эллиптичности (3) обе части уравнения (2) разделить на $\sqrt{1+\ |u_x|^2}$, то полученное уравнение будет равномерно эллиптическим с показателем $m = 2$. Тем самым условие ослабленного вхождения аргумента $u$ в уравнение (2) снимается при произвольном $m > 2$ в условиях (3–7). Очевидно, что для параболического уравнения (1) так снять условие ослабленного вхождения аргумента $u$ при $m > 2$ невозможно.

Обратимся теперь к параболическим уравнениям дивергентного вида:

$$u_t - \frac{d}{dx_i}a_i(x,t,u,u_x) + a(x,t,u,u_x) = 0. \tag{8}$$

Оценки констант Гёльдера и максимума модуля градиента решений таких уравнений получены О. А. Ладыженской и Н. Н. Уральцевой с положительными константами ν, μ, $c$ при условиях:

$$a_i(x,t,u,p)p_i \geq \nu|p|^2 - c, \tag{9}$$

$$\nu|\xi|^2 \leq \frac{\partial a_i}{\partial p_j}\xi_i\xi_j \leq \mu|\xi|^2, \tag{10}$$

$$|a_i(x,t,u,p)| + \left|\frac{\partial a_i}{\partial u}\right| \leq c(|p|+1), \tag{11}$$

$$|a_i(x,t,u,p)| + \left|\frac{\partial a_i}{\partial u}\right| \leq c(|p|+1), \tag{12}$$

которые соответствуют неравенствам (3–7) с показателем роста $m = 2$.

В работе [9] при доказательстве разрешимости начально-краевой задачи для уравнения нестационарной фильтрации:

$$u_t - \frac{\partial}{\partial x_i}|u|^{l_i}\left|u_{x_i}\right|^{m_i-2}u_{x_i} = f(x,t), l_i \geq 1, m_i \geq 2 \tag{13}$$

выяснилось, что при оценке максимума модуля градиента основной трудностью является не вырождение уравнения при $u = 0$, а то обстоятельство, что не выполнены условия ослабленного вхождения аргумента $u$, аналогичные условиям (7). В этой работе удалось получить оценку:

$$u^\alpha|u_x| \leq c \tag{14}$$

с некоторым $\alpha > 0$ для неотрицательных решений второй начально-краевой задачи только при двух пространственных переменных (при некоторых ограничениях на разброс показателей $l_1, l_2$ и $m_1, m_2$).

В 1986 г. Э. Ди Бенедетто в работе [10] был предложен метод оценки констант Гёльдера решений параболических уравнений дивергентного вида со степенью роста по $|p|$ главной части уравнения и младших членов соответственно $m-2$ и $m;\ m > 2$.

Применив метод Ди Бенедетто, А. В. Иванов (см., например, [11]) получил оценки констант Гёльдера для неравномерно параболических уравнений дивергентного вида и для уравнений, допускающих неявное вырождение (уравнения вида (13)), со степенями роста по $|p|$ главной части уравнения и младших членов соответственно $m-2$ и $m;\ m > 2$.

В совместных работах с А. В. Ивановым [12, 13], а также в совместной работе с А. В. Ивановым и В. Ягером для решений первой начально-краевой задачи класса уравнений с неявным вырождением, модельным для которого является уравнение (13), были получены оценки констант Гёльдера, а также оценки максимума модуля градиента вида (14) и доказаны теоремы существования обобщенных решений, для которых справедливы эти оценки.

В работе [15] получены Гёльдеровские оценки решений вырождающихся недивергентных эллиптических и параболических уравнений. С некоторыми другими результатами по обсуждаемой в настоящей работе тематике можно ознакомиться в обзорной статье [16].

В настоящей работе для ограниченных решений параболических уравнений общего вида (1) при условиях намного слабее, чем (3–7) получена локальная по временно́й переменной оценка максимума модуля градиента через максимум модуля градиента решения на параболической границе цилиндра, в котором рассматривается уравнение; в частности, не требуется малости ε в неравенствах (7).

EDN: XZBNAO
URL: https://vestnik-sut.ru/2025-4/C04.pdf

Заметим, что при $m = 0$ в приведенных ниже условиях (15, 16) оценка получается глобальной по временно́й переменной $t$.

Условие, состоящее в том, что младшие члены должны расти по $|p|$ не более, чем на два порядка быстрее главной части уравнения (неравенства (3) и (4)), называется условием С. Н. Бернштейна. Известны примеры уравнений, градиенты решений которых оказываются неограниченными, если это условие не выполнено. Но во всех этих примерах градиенты неограниченны на боковой поверхности цилиндра, в котором рассматривается начально-краевая задача для уравнения. Один из таких примеров, а именно пример, исследованный А. Ф. Филипповым, приведен в [3].

В настоящей работе локальная по временно́й переменной $t$ оценка максимума модуля градиента ограниченного решения уравнения (1) через максимум модуля градиента решения на границе цилиндра, в котором рассматривается решение, получена при условиях:

$$a_{ij}\xi_i\xi_j \geq \nu|\xi|^2;\ \nu(|p|) > 0;\ a_{ij} = a_{ji}, \tag{15}$$

$$\frac{c_1}{\nu}\left|\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k}\right|^2 |p_k|^2 + \frac{c_2}{\nu}\left|\frac{\partial a_{ij}}{\partial u}\right|^2 |p|^4 + 2\left|\frac{\partial a}{\partial x_k}\right| |p_k| + \left|\frac{\partial a}{\partial u}\right| |p|^2 \leq c|p|^{m+2}, \tag{16}$$

где $c_1, c_2$ , $c$ и $m$ – некоторые положительные константы. Неравенство (16) предполагается выполненным при достаточно больших $|p|$. Заметим, что функция $\nu(|p|)$ может стремиться к нулю при неограниченном возрастании $|p|$. При $m = 0$ в условии (16) получена глобальная по $t$ оценка максимума модуля градиента решения уравнения (1).

Что касается оценки максимума модуля градиента решения на границе области, то для ее получения достаточно, чтобы условие С. Н. Бернштейна выполнялось вблизи параболической границы цилиндра, в котором рассматривается уравнение.

## Оценка максимума модуля градиента

Перейдем к доказательству основного результата работы. Пусть $\Omega$ – ограниченная область в $R^n$ с границей $\partial\Omega$; $x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega$; $Q_T = \Omega \cdot [0, T]$; $S_T = \partial\Omega \cdot [0, T]$ – боковая поверхность цилиндра $G_T$; $\Omega_0 = D \cdot \{0\}$ – нижнее основание цилиндра $\Omega_T$; $\Gamma_T = \Omega \cup S_T$ – параболическая граница цилиндра $Q_T$.

В цилиндре $Q_T$ рассмотрим начально-краевую задачу:

$$u_t - a_{ij}(x, t, u, u_x)u_{x_i x_j} + a(x, t, u, u_x) = 0, \tag{17}$$

$$u|_{\Gamma_T} = \psi(x, t). \tag{18}$$

Относительно функций $a_{ij}(x, t, u, p)$ и $a(x, t, u, p)$ будем предполагать выполненными следующие условия (см. условия (15), (16)):

1) $$a_{ij} = a_{ji};\ a_{ij}\xi_i\xi_j \geq \nu|\xi|^2;\ \nu(|p|) > 0;\ a_{ij} = a_{ji}; \tag{19}$$

2) $$\frac{c_1}{\nu}\left|\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k}\right|^2 |p_k|^2 + \frac{c_2}{\nu}\left|\frac{\partial a_{ij}}{\partial u}\right|^2 |p|^4 + 2\left|\frac{\partial a}{\partial x_k}\right| |p_k| + \left|\frac{\partial a}{\partial u}\right| |p|^2 < c|p|^{m+2}, \tag{20}$$

для $|p| > L$, где $L$ – достаточно большое число; $m \geq 0$;

3) функции $a_{ij}(x, t, u, p)$ и $a(x, t, u, p)$ и их первые производные по переменным $x$, $u$ и $p$ непрерывны;

4) пусть функция $u(x, t)$ и ее производные $u_t$, $u_x$, $u_{x_k t}$, $u_{x_i x_j}$, $u_{x_k x_i x_j}$ непрерывны в замкнутом цилиндре $\bar{Q}_T$;

5) пусть $\max_{(x,t)\in\bar{Q}_T}|u| = m_0$; $\max_{(x,t)\in\Gamma_T}|u_x| = M_0$.

Продифференцируем обе части уравнения (17) по переменной $x_k$:

$$u_{x_k t} - a_{ij}u_{x_k x_i x_j} - \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k}u_{x_i x_j} - \frac{\partial a_{ij}}{\partial u}u_{x_k}u_{x_i x_j} - \frac{\partial a_{ij}}{\partial p_l}u_{x_l x_k}u_{x_i x_j} + \frac{\partial a}{\partial x_k} + \\ + \frac{\partial a}{\partial u}u_{x_k} + \frac{\partial a}{\partial p_l}u_{x_l x_k} = 0. \tag{21}$$

Положим $v = \sum_{k=1}^{n} u_{x_k}^2$. Тогда:

$$v_t = 2u_{x_k}u_{x_k t};\ v_{x_i} = 2u_{x_k}u_{x_k x_i};\ v_{x_i x_j} = 2u_{x_j x_k}u_{x_k x_i} + 2u_{x_k}u_{x_k x_j x_i}. \tag{22}$$

Умножив обе части равенства (21) на $2u_{x_k}$ и просуммировав по $k$, в силу соотношений (22) получим:

$$v_t - a_{ij}v_{x_i x_j} + 2a_{ij}u_{x_j x_k}u_{x_k x_i} - 2\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k}u_{x_k}u_{x_i x_j} - 2\frac{\partial a_{ij}}{\partial u}vu_{x_i x_j} - \frac{\partial a_{ij}}{\partial p_l}v_{x_l}u_{x_i x_j} + \\ +2\frac{\partial a}{\partial x_k}u_{x_k} + 2\frac{\partial a}{\partial u}v + \frac{\partial a}{\partial p_l}v_{x_l} = 0.$$

Перегруппировав слагаемые в последнем равенстве, получим:

$$v_t - a_{ij}v_{x_i x_j} + \left(-\frac{\partial a_{ij}}{\partial p_l}u_{x_i x_j} + \frac{\partial a}{\partial p_l}\right)v_{x_l} + 2a_{ij}u_{x_j x_k}u_{x_k x_i} - 2\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k}u_{x_k}u_{x_i x_j} - \\ -2\frac{\partial a_{ij}}{\partial u}vu_{x_i x_j} + 2\frac{\partial a}{\partial x_k}u_{x_k} + 2\frac{\partial a}{\partial u}v = 0. \tag{23}$$

Положим $u_x = p$. Далее уравнение (23) будем рассматривать на множестве:

$$Q_{T,L} = \{(x,t) \in Q_T \div\ |p| > L\}.$$

Применив неравенство Коши $|ab| \le \delta a^2 + \frac{1}{4\delta}b^2$, получим:

$$\left|\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k}u_{x_k}u_{x_i x_j}\right| \le \delta v u_{x_i x_j}^2 + \frac{1}{4\delta v}\left|\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k}u_{x_k}\right|^2;\ \left|\frac{\partial a_{ij}}{\partial u}vu_{x_i x_j}\right| \le \delta v u_{x_i x_j}^2 + \frac{1}{4\delta v}\left|\frac{\partial a_{ij}}{\partial u}v\right|^2.$$

Выбирая $\delta$ достаточно малым, в силу условия (19) получим:

$$\delta v u_{x_i x_j}^2 < a_{ij}u_{x_j x_k}u_{x_k x_i},$$

тогда в силу условия (20) из (23) следует неравенство:

$$v_t - a_{ij}v_{x_i x_j} + \left(-\frac{\partial a_{ij}}{\partial p_l}u_{x_i x_j} + \frac{\partial a}{\partial p_l}\right)v_{x_l} - c|p|^{m+2} \le 0, \tag{24}$$

или, что то же самое:

$$v_t - a_{ij}v_{x_i x_j} + \left(-\frac{\partial a_{ij}}{\partial p_l}u_{x_i x_j} + \frac{\partial a}{\partial p_l}\right)v_{x_l} - c|p|^m v \le 0. \tag{25}$$

Рассмотрим уравнение (17) в последовательности цилиндров $Q_{t_{k-1},t_k} = \Omega \times [t_{k-1}, t_k]$, где $t_0 = 0$; $t_{k-1} < t_k$. Точный выбор чисел $t_k$ будет указан ниже.

Положим $v = \hat{v}e^{\lambda_k(t-t_{k-1})}$; $t \in [t_{k-1}, t_k]$. Тогда из (25) для функции $\hat{v}$ получим:

$$\hat{v}_t - a_{ij}\hat{v}_{x_i x_j} + \left(-\frac{\partial a_{ij}}{\partial p_l}u_{x_i x_j} + \frac{\partial a}{\partial p_l}\right)\hat{v}_{x_l} + (\lambda_k - c|p|^m)\hat{v} \le 0. \tag{26}$$

1) Рассмотрим случай произвольного $m \ge 0$ в условии (20).

Положим $M(t) = \max_{(x,t)\in Q_t}|u_x|$. Очевидно, $M(t)$ является неубывающей функцией. Кроме того, в силу непрерывности $|u_x|$ функция $M(t)$ является непрерывной.

Пусть числа $t_k$ – решения уравнений:

$$t_k - t_{k-1} = \frac{\alpha}{cM^m(t_k)};\ \alpha > 0;\ t_0 = 0. \tag{27}$$

Если функция $M(t)$ неограниченно возрастает, то по теореме Больцано – Коши эти уравнения имеют решения.

Положим $M_k = M(t_k)$; $t_k - t_{k-1} = \Delta t_k$. Тогда $\Delta t_k = \frac{\alpha}{cM_k^m}$.

Если $\lambda_k = cM_k^m$, то в силу принципа максимума из (25) следует, что максимум функции $\hat{v}$ находится на параболической границе цилиндра $Q_{t_{k-1},t_k}$ (не ограничивая общности, будем предполагать, что $M_0 \ge L$, где $L$ – константа из условия (20)). Тогда $\hat{v} = ve^{-\lambda_k(t-t_{k-1})} \le M_{k-1}^2$, откуда $v \le M_{k-1}^2 e^{\lambda_k \Delta t_k}$. В силу определения функции $v$, величин $M_k$, и поскольку $\lambda_k \Delta t_k = \alpha$, в результате получим:

$$M_k^2 \le M_{k-1}^2 e^{\alpha};\ M_k^2 \le M_0^2 e^{\alpha k}, \tag{28}$$

тогда $\frac{1}{M_k^m} \ge \frac{1}{M_{k-1}^m} e^{-\frac{m}{2}\alpha}$, в частности $\frac{1}{M_1^m} \ge \frac{1}{M_0^m} e^{-\frac{m}{2}\alpha}$. В силу определения $\Delta t_k$ получим:

$$\Delta t_k \ge \Delta t_{k-1} e^{-\frac{m}{2}\alpha};\ \Delta t_1 \ge \frac{\alpha}{cM_0^m} e^{-\frac{m}{2}\alpha},$$

тогда $\Delta t_k \ge \frac{\alpha}{cM_0^m} e^{-\frac{m}{2}\alpha k}$;

$$\sum_{k=1}^{\infty} \Delta t_k \ge \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha}{cM_0^m} e^{-\frac{m}{2}\alpha k}. \tag{29}$$

где последняя сумма представляет собой сумму всех членов геометрической прогрессии с первым членом, равным $\frac{\alpha}{cM_0^m} e^{-\frac{m}{2}\alpha}$, и знаменателем $e^{-\frac{m}{2}\alpha} < 1$.

Следовательно:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \Delta t_k \ge \frac{\alpha}{cM_0^m} e^{-\frac{m}{2}\alpha} \frac{1}{1 - e^{-\frac{m}{2}\alpha}} = \frac{2}{cmM_0^m} \frac{\frac{m}{2}\alpha}{e^{\frac{m}{2}\alpha} - 1}. \tag{30}$$

Известно, что $\frac{y}{e^y-1} < 1$ при $y > 0$. Действительно, если $f(y) = e^y - 1 - y; y \geq 0$, то $f(0) = 0$; $f'(y) = e^y - 1 \geq 0$, следовательно $e^y - 1 - y > 0$ при $y > 0$, и значит, $\frac{y}{e^y-1} < 1$ при $y > 0$. Поскольку $\lim_{y\to 0}\frac{y}{e^y-1} = 1$, то выбирая в (30) параметр α достаточно малым, можно получить:

$$\frac{\frac{m}{2}\alpha}{e^{\frac{m}{2}\alpha} - 1} = \theta, \tag{31}$$

где $\theta < 1$ и сколь угодно близко к 1.

Положим:

$$\frac{2}{cmM_0^m}\theta = T_0\,, \tag{32}$$

тогда из (30) получим:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\Delta t_k \geq T_0. \tag{33}$$

В силу произвольной близости θ к единице, из оценок (28) получим оценку модуля градиента решения уравнения (17) для любого $t \in [0, T_0)$.

Пусть $t = \sigma T_0$; $0 < \sigma < 1$. Найдем тот номер $N$, для которого справедливо равенство:

$$\sum_{k=1}^{N}\frac{\alpha}{cM_0^m}e^{-\frac{m}{2}\alpha k} = t = \sigma T_0.$$

Поскольку сумма представляет собой сумму $N$ членов геометрической прогрессии, то:

$$\frac{\alpha}{cM_0^m}e^{-\frac{m}{2}\alpha}\frac{1 - e^{-\frac{m}{2}\alpha N}}{1 - e^{-\frac{m}{2}\alpha}} = \sigma T_0,$$

откуда в силу (31) и (32) получим: $1 - e^{-\frac{m}{2}\alpha N} = \sigma = \frac{t}{T_0}$; $e^{\alpha N} = \left(1 - \frac{t}{T_0}\right)^{-\frac{2}{m}}$.

Тогда из (28) получим оценку:

$$M_N^2 \leq M_0^2\left(1 - \frac{t}{T_0}\right)^{-\frac{2}{m}};\ t \in [0, T_0);\ \ T_0 = \frac{2}{cmM_0^m}\theta; \theta < 1, \tag{34}$$

где θ сколь угодно близко к 1.

2) Пусть в условии (20) $m = 0$, тогда неравенство (25) примет вид:

$$v_t - a_{ij}v_{x_ix_j} + \left(-\frac{\partial a_{ij}}{\partial p_l}u_{x_ix_j} + \frac{\partial a}{\partial p_l}\right)v_{x_l} - cv \leq 0. \tag{35}$$

Положим $v = \hat{v}e^{\lambda t}$, тогда из (26) получим, что во внутренней точке максимума функции $\hat{v}$ выполняется неравенство: $(\lambda - c)\hat{v} \le 0$. Если $\lambda \ge c$, то максимум функции $\hat{v}$ находится либо на параболической границе цилиндра $Q_T$, т. е. $\hat{v} \le M_0$, либо $\hat{v} \le L$, где $L$ – константа из условия 2 (см. неравенство (20)). Тогда для функции $v$ очевидным образом получаем оценку, которая справедлива во всем цилиндре $Q_T$:

$$v \le \max\{M_0, L\}e^{cT}. \tag{36}$$

Заметим, что в оценки (34) и (36) явным образом не входит константа $\max_{(x,t)\in\bar{Q}_T}|u| = m_0$. От константы $m_0$ зависят константы $c$, $L$ и $M_0$.

3) Как говорилось выше, априорная оценка максимума модуля градиента решения является важным звеном доказательства существования классического решения квазилинейного параболического уравнения общего вида.

Пусть кроме 1 и 2 (неравенства (19) и (20)) выполнены дополнительные условия:

3.1) уравнение является равномерно параболическим, т. е.:

$$a_{ij}\xi_i\xi_j \ge \nu(1 + |p|)^{l-2}|\xi|^2;\ l \ge 2; \nu > 0;$$

3.2) вблизи всей боковой поверхности цилиндра $Q_T$ выполнено условие С. Н. Бернштейна:

$$|a(x,t,u,p)| \le c(1 + |p|)^l,$$

где показатель $l$ из условия 3.1;

3.3) выполнено некоторое условие, из которого следует оценка максимума модуля решения уравнения, например неравенство:

$$ua(x,t,u,0) \ge -b_1u^2 - b_2\,,$$

где $b_1$ и $b_2$ – некоторые константы.

Тогда при некоторых предположениях о гладкости границы области $\Omega$ и начально-краевых условиях хорошо известными методами (см. [3]) можно доказать существование классического решения начально-краевой задачи для уравнения (17) в цилиндре $Q_T$, в котором получена оценка максимума модуля градиента решения.

## Литература

1.Ладыженская О. А. Решение в целом первой краевой задачи для квазилинейных параболических уравнений // Доклады Академии наук СССР. 1956. Т. 107. № 5. С. 636–639.

2. Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973. 576 с.

3. Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967. 738 с. EDN: VLRBIL

4. Крылов Н. В., Сафонов М. В. Некоторое свойство решений параболических уравнений с измеримыми коэффициентами // Известия АН СССР. Сер. матем. 1980. Т. 44. № 1. С. 161–175.

5. Крылов Н. В. Нелинейные эллиптические и параболические уравнения второго порядка. М.: Наука, 1985. 376 с.

6. Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н. Об оценках Гёльдеровских норм для решений квазилинейных уравнений недивергентного типа // Успехи математических наук. 1980. Т. 35. № 4. С.144–145.

7. Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н. Оценки решений квазилинейных параболических уравнений недивергентного типа // Успехи математических наук. 1981. Т. 36. № 4. С. 220.

8. Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н. Оценка и константы Гёльдера для функций, удовлетворяющих равномерно эллиптическому или равномерно параболическому неравенству с неограниченными коэффициентами // Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций. 17. Записки научного семинара ЛОМИ. 1985. Т. 147. С. 72–94.

9. Мкртычян П. З. Об одном вырождающемся квазилинейном параболическом уравнении, возникающем в теории нестационарной фильтрации // Известия Академии наук Армянской ССР. Серия: Математика. 1989. Т. 24. № 2. С. 103–116.

10. Di Benedetto E. On the Local Behavior of Solutions of Degenerate Parabolic Equations with Measurable Coefficients // Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa. Classe di Scienze. Serie 4. 1986. Vol. 13. No. 3. PP. 487–535.

11. Иванов А. В. Оценки константы Гёльдера обобщенных решений вырождающихся параболических уравнений // Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций. 18. Записки научного семинара ЛОМИ. 1986. Т. 152. С. 21–44.

12. Иванов А. В., Мкртычян П. З. О существовании непрерывных по Гёльдеру обобщенных решений первой краевой задачи для квазилинейных параболических уравнений, допускающих двойное вырождение // Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций. 21. Записки научного семинара ЛОМИ. 1990. Т. 182. С. 3–28.

13. Иванов А. В., Мкртычян П. З. Весовая оценка градиента для обобщенных решений квазилинейных вырождающихся параболических уравнений // Труды Математического института им. В. А. Стеклова. 1990. Т. 188. С. 53–58.

14. Иванов А. В., Мкртычян П. З., Яегер В. Существование и единственность регулярного решения первой начально-краевой задачи для некоторого класса дважды нелинейных параболических уравнений // Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций. 25. Записки научного семинара ПОМИ. Т. 213. 1994. С. 48–65.

15. Назаров А. И. Гёльдеровские оценки решений вырождающихся недивергентных эллиптических и параболических уравнений // Алгебра и анализ. 2009. Т. 21. № 4. С. 174–195. EDN: RLQNBV

16. Апушкинская Д. Е., Архипова А. А., Назаров А. И., Осмоловский В. Г., Уральцева Н. Н. Обзор результатов научной школы СПбГУ по нелинейным уравнениям в частных производных: Препринт Санкт-Петербургского математического общества. Поступил 14.08.2023. URL: https://www.mathsoc.spb.ru/preprint/2023/23-04.pdf

**Статья поступила 19 ноября 2025 г.**
**Одобрена после рецензирования 25 декабря 2025 г.**
**Принята к публикации 28 декабря 2025 г.**

**Информация об авторе**

*Мкртычян Павел Зорикович* – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры высшей математики Санкт-Петербургского государственного университета телекоммуникаций им. проф. М. А. Бонч-Бруевича. E-mail: mkrtychyan.pz@sut.ru

EDN: XZBNAO
URL: https://vestnik-sut.ru/2025-4/C04.pdf

# On the Estimation of the Maximum Modulus of the Gradient of a Solution to a Quasi-Linear Parabolic Equation of General Form

**P. Mkrtychyan**

The Bonch-Bruevich Saint Petersburg State University of Telecommunications,
St. Petersburg, 193232, Russian Federation

***Relevance.*** *The article is devoted to the topical problem of estimating the maximum of the gradient modulus of the solution to a quasilinear parabolic equation of a general form. Estimating the maximum of the gradient modulus is an important step in proving the existence of a classical solution to initial-boundary value problems for quasilinear elliptic and parabolic equations.* ***The aim of the research*** *is to obtain a local-in-time estimate of the maximum of the gradient modulus of the solution through the maximum of the modulus of the solution itself and the gradient modulus on the parabolic boundary of the domain, without assuming the so-called conditions of weakened entry of the argument $u$ (where $u$ is the solution of the equation). Moreover, it turned out that this estimate is obtained without assuming Bernstein's condition throughout the domain, which consists in the fact that the lower-order terms of the equation grow with respect to the gradient modulus no more than two orders faster than the principal part of the equation. However, in order to obtain an estimate of the maximum of the gradient modulus of the solution on the boundary of the domain, the validity of the S. N. Bernstein's condition near the boundary of the domain is required. (In the present work, the boundedness of the solution and the maximum of the gradient modulus of the solution on the parabolic boundary of the domain are assumed to be satisfied, and the degeneration of the principal part of the equation is also allowed.)* ***The main method*** *of proof is the classical maximum principle for parabolic equations.* ***Result.*** *In the general case, the obtained estimate is local with respect to the time variable. A value $T_0$ of the time variable $t$, dependent on the constants describing the structure of the equation, is found such that for all $t$ satisfying the inequality $0 \leq t < T_0$, the maximum of the solution gradient modulus is estimated through the maximum of the solution gradient modulus on the boundary of the domain and the constants describing the structure of the equation. In the case of bounded lower-order terms of the equation, the estimate is global in time.* ***Theoretical significance.*** *The results of the study represent a certain contribution to the theory of quasilinear parabolic equations of general form.*

***Key words:*** *quasilinear parabolic equations of general form, estimate of the maximum of the gradient modulus, condition of weakened inclusion of the argument $u$, Bernstein's condition*

## Information about Author

*Mkrtychyan Pavel* – Ph. D. of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Associate Professor of the Department of Higher Mathematics (The Bonch-Bruevich Saint Petersburg State University of Telecommunications). E-mail: mkrtychyan.pz@sut.ru

EDN: XZBNAO
URL: https://vestnik-sut.ru/2025-4/C04.pdf